Математические структуры и моделирование
2021. № 4(60). С. 54–57

УДК 519 : 630.18
DOI 10.24147/2222-8772.2021.4.54-57

РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ЭКОСИСТЕМЫ «ЛЕС–ПОЧВА»

Л.А. Володченкова
к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье изучаются стационарные равновесия в системе «лес–почва», представленной как математическая модель в форме системы дифференциальных уравнений. Обсуждаются катастрофические смены равновесий, показан возможный переход к циклическим равновесиям.

Ключевые слова: модель, система «лес-почва», стационарные равновесия, теория катастроф, теория бифуркаций, бифуркация Андронова–Хопфа.

В статье [1] была предложена модель системы «лес-почва» в форме системы дифференциальных уравнений. В данной статье мы изучаем стационарные равновесия этой системы и катастрофические переходы между ними.

Итак, мы рассматриваем следующую модель, описывающую систему «лес-почва»

$$\begin{cases} \dfrac{dB}{dt} = rB\left(1 - \dfrac{B}{k}\right) - \alpha w P, \\ \dfrac{dP}{dt} = \gamma(p - P^2)P + \delta w^2 B. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $B(t)$ — биомасса леса, $P(t)$ — мера плодородия почвы, p — мера типа почвообразующей породы, w — влажность почвы, $r, k, \alpha, \gamma, \delta > 0$ константы.

Первое уравнение в системе (1) — это подправленное с учётом влияния почвы на лес уравнение для биомассы, приведённое в [2], а второе уравнение также подправленное уравнение, описывающее динамику почвы с учётом влияния на неё биомассы леса, изученное в статье [3].

Стационарные равновесия (B, P) системы «лес–почва»

$$\frac{dB}{dt} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = 0$$

находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} rB\left(1 - \dfrac{B}{k}\right) - \alpha w P = 0, \\ \gamma(p - P^2)P + \delta w^2 B = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Имеем очевидное стационарное равновесие $(B, P) = (0, 0)$. Остальные — это решения системы

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\gamma pr}{\alpha w} + \delta w\right) B - \dfrac{\gamma pr}{\alpha w K} B^2 - \dfrac{\gamma r^3}{\alpha^3 w^3} B^3 + \dfrac{3\gamma r^3}{\alpha^3 w^3 K} B^4 - \\ \qquad\qquad\qquad - \dfrac{3\gamma p r^3}{\alpha^3 w^3 K^2} B^5 + \dfrac{\gamma p r^3}{\alpha^3 w^3 K^3} B^6 = 0, \\ P = \dfrac{\gamma r}{\alpha w} B \left(1 - \dfrac{\gamma B}{K}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Первое уравнение системы (3) даёт решение $B = 0$, и затем поиск корней сводится к решению уравнения 5-й степени по B. Следовательно, имеется, как минимум, ещё один действительный корень B_1. Остаётся найти корни уравнения 4-й степени. Однако, например, при

$$r = \alpha = \beta = \gamma = w = K = 1, \quad p = 2, \quad \delta = 20, \tag{4}$$

это уравнение 4-й степени не имеет действительных корней, что видно из графика на рис. 1 соответствующей функции

$$y := 22 - 2 * B - B^2 + 3 * B^3 - 3 * B^4 + B^5. \tag{5}$$

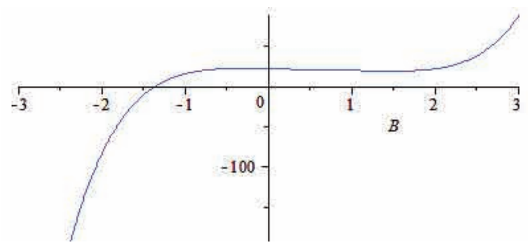

Рис. 1. График функции (5)

Рассмотрим случай (4) подробнее. При потере устойчивости равновесия $R_0 = (0, 0)$ система, как показано в [1], претерпевает бифуркцию Андронова–Хопфа. Второе равновесие $R_1 = (B_1, P_1) \approx (-1{,}4; -3{,}36)$ таким свойством не обладает.

В самом деле, имеем

$$f_1(B, P) = r(1 - B/K)B - \alpha w P, \quad f_2(B, P) = \beta(p - P^2)P + \delta w^2 B,$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(B, P)}(B_1, P_1) = \begin{vmatrix} r - \frac{r}{K}B & -\alpha w \\ \delta w^2 & \gamma p - 3P^2 \end{vmatrix} (-1{,}4; -3{,}36) =$$

$$= \begin{vmatrix} 3,8 - \lambda & -1 \\ 20 & -31,87 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 28{,}07\lambda + 20 = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения 787,92-80>0. Это означает, что нет комплексно-сопряжённых корней и, следовательно, не выполняются условия теоремы Андронова–Хопфа [1] — нет перехода к циклическим решениям вокруг стационарного равновесия R_1.

Равновесия R_0, R_1 не являются реальными равновесиями, поскольку в реальной ситуации $B(t) > 0, P_(t) > 0$, т. е. биомасса и мера плодородия почвы — положительные величины, и, следовательно, нужно брать ненулевые положительные значения для координат равновесия. Но в действительности вместо уравнения (2) можно рассматривать систему

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= r(B - B_*)\left(1 - \frac{(B - B_*)}{k}\right) - \alpha w(P - P_*), \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma[p - (P - P_*)^2](P - P_*) + \delta w^2(B - B_*), \end{aligned} \tag{6}$$

где $B_*, P_* > 0$ — величины, осуществляющие сдвиг в пространстве (B, P) к реальным значения равновесий системы «лес-почва».

Понятно, что и до сдвига и после сдвига $R_i \to R_i^* = (B_i^*, P_i^*)$ равновесие R_1^* имеет меньшее значение биомассы, чем R_0^*.

В соответствии с теорией катастроф равновесие R_1^* при потере устойчивости перейдёт скачком в равновесие R_0^*, а последнее в принципе может вернуться к равновесию R_1^* (пожар, рубка леса), но скорее всего следует ожидать бифуркации Андронова–Хопфа, поскольку именно это отвечает нормальной эволюции леса.

Поэтому скачкообразная смена $R_1^* \to R_0^*$ стационарного равновесия системы говорит о том, что лес переходит к равновесию, в котором он продуцирует больше биомассы, и при потере устойчивости этот стационарный процесс закончится переходом посредством бифуркации Андронова–Хопфа [1] к циклическим изменениям биомассы и состояния почвы.

Можно проинтерпретировать это как стационарное существование экосистемы в состоянии R_1^* с малой продукцией биомассы (посадки), затем переход к состоянию R_0^* с большей продукцией биомассы (зрелый лес), и, наконец, экосистема оказывается в состоянии, когда каким-то образом периодически меняются биомасса и плодородие почвы (пожары + восстановление леса после пожаров или вырубки + восстановление леса после вырубок).

Литература

1. Володченкова Л.А., Гуц А.К. Математические модели лесных экосистем с бифуркациями Андронова–Хопфа // Математические структуры и моделирование. 2021. № 3(59). С. 106–122.
2. Chaudhary M.M., Dhar J., SahM G.P. Mathematical Model of Depletion of Forestry Resource: Effect of Synthetic Based Industries // International Journal of Biological Sciences. 2013. Vol. 7, No. 4, P. 798–802.

3. Володченкова Л.А. Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка» // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.

EQUILIBRIA IN THE ECOSYSTEM MODEL "FORESTRY–SOIL"

L.A. Volodchenkova
Ph.D. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. In this article stationary equilibria in the system “forest–soil”, presented as a mathematical model in the form systems of differential equations, are studied. Catastrophic changes in equilibrium, a possible transition to cyclic equilibria are considered

Keywords: Model, system “forest–soil”, stationary equilibrium, catastrophe theory, bifurcation theory, Andronov-Hopf bifurcation.

References

1. Volodchenkova L.A. and Guts A.K. Matematicheskie modeli lesnykh ekosistem s bifurkatsiyami Andronova–Khopfa. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2021, no. 3(59), pp. 106–122. (in Russian)
2. Chaudhary M.M., Dhar J., and SahM G.P. Mathematical Model of Depletion of Forestry Resource: Effect of Synthetic Based Industries. International Journal of Biological Sciences, 2013, vol. 7, no. 4, pp. 798–802.
3. Volodchenkova L.A. Model’ plodorodiya pochvy s tochki zreniya katastrofy ¡¡sborka¿¿. Matematicheskoe i komp’yuternoe modelirovanie: sbornik materialov Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii (Omsk, 21 noyabrya 2014 g.), Omsk, izd-vo Om. gos. un-ta, 2014, pp. 25–26.

   (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 19.10.2021