А. К. Гуц, Теоретико-топосный подход к основаниям теории относительности, *Докл. АН СССР*, 1991, том 318, номер 6, 1294–1297

Доказательство теоремы 3 опирается на очевидную формулу

$$m_i(s) = \begin{cases} \max(m_i'(s'),\ m_i''(s''), & \text{если в } s \text{ ходит игрок 1,} \\ \min(m_i'(s'),\ m_i''(s''), & \text{если в } s \text{ ходит игрок 2,} \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

В обоих случаях $(m_1'(s') = m_2'(s')$ и $m_1''(s'') = m_2''(s'')) \Rightarrow m_1(s) = m_2(s)$.

Международный институт
теории прогноза землетрясений
и математической геофизики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 II 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гурвич В.А., Карзанов А.В., Хачиян Л.Г.* – ЖВМиМФ, 1988, т. 28, № 9, с. 1407–1417. 2. *Гурвич В.А.* – УМН, 1988, т. 43, № 2 (260), с. 135–136. 3. *Гурвич В.А., Лебедев В.Р.* – УМН, 1989, т. 44, № 1 (265), с. 193–194. 4. *Гурвич В.А.* – УМН, 1990, т. 45, № 4 (274), с. 151–152. 5. *Гурвич В.А.* – ДАН, 1990, т. 314, № 3, с. 542–546. 6. *Гурвич В.А.* – ДАН, 1988, т. 303, № 4, с. 789–793. 7. *Гурвич В.А.* – ЖВМиМФ, 1975, т. 15, № 2, с. 358–371.

УДК 513.82 МАТЕМАТИКА

© А.К. ГУЦ

ТЕОРЕТИКО-ТОПОСНЫЙ ПОДХОД К ОСНОВАНИЯМ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 23 I 1991)

В большинстве случаев при аксиоматическом описании теории относительности используется теория множеств. И хотя при этом достигнуты определенные успехи [1, 2], следует отметить, что все имеющиеся аксиоматики специальной теории относительности не позволяют с удовлетворением заявить о завершении построения данной фундаментальной физической теории. Еще более сложная ситуация сложилась с аксиоматизацией общей теории относительности [2].

С геометрической точки зрения предпочтительнее говорить о построении единой синтетической теории псевдоевклидовых и псевдоримановых многообразий. Однако такого единого подхода при аксиоматизациях специальной и общей теорий относительности не наблюдается. Как правило, системы аксиом для специальной теории относительности содержат меньшее число исходных понятий и отношений, более просты и непосредственно ведут к конечной цели. В случае общей теории относительности оказывается затруднительным введение псевдоримановой метрики, особенно гладкой, поскольку приходится предварительно решать задачу оснащения рассматриваемого множества (пространства–времени) структурой (гладкого) многообразия [2].

Можно подобные сугубо математические затруднения объяснить тем, что речь идет об описании двух существенно различных физических теорий. В одном случае имеем дело с математической теорией (плоского) пространства–времени, на фоне которого на равных разворачивается действие всевозможных физических полей, в том числе и гравитационного. В другом случае речь идет об аксиоматическом описании только одного физического поля – гравитационного. Однако, во-первых, далеко не все физики согласны с подобными взглядами, а во-вторых, вполне естественно стремиться к созданию единой теории, привлекая для этого, если потребуется, новые математические идеи.

На взгляд автора, возникшая проблема есть результат того, что в качестве основы ее разрешения используется теоретико-множественный подход, хотя и традиционный для математики двадцатого века, но в данном случае, коль дело касается математического описания реального пространства–времени, именно в недостатках используемого математического аппарата следует искать корень неудач. Наивно думать, что все атрибуты пространственно-временной формы существования материи могут быть полностью сформулированы в терминах теории множеств. Последняя – всего *лишь* исторический продукт сознания, она возникла как аппарат для анализа бесконечного, но имеющий предел при применении его к анализу пространства–времени.

В данной заметке показывается, в какой мере эффективен теоретико-топосный подход для разрешения проблемы единого аксиоматического описания специальной и общей теорий относительности. Другими словами, ниже излагается категорная теория псевдоримановых многообразий.

Пусть $\mathcal{E}$ – элементарный топос с объектом непрерывных вещественных чисел $\mathbf{R}_T$ (см. [3]).

Аффинный морфизм α: $\mathbf{R}_T \to \mathbf{R}_T$ есть конечная композиция морфизмов вида

$$1_{\mathbf{R}_T}, \oplus \circ (1_{\mathbf{R}_T} \times \mu) \circ j, \quad \otimes \circ (\lambda \times 1_{\mathbf{R}_T}) \circ j,$$

где $\oplus, \otimes$ – операции сложения и умножения в $\mathbf{R}_T$ соответственно, μ, λ: $1 \to \mathbf{R}_T$ – произвольные элементы в $\mathbf{R}_T$ и j: $\mathbf{R}_T \simeq 1 \times \mathbf{R}_T$ – изоморфизм. Через Γ обозначим совокупность всех аффинных морфизмов из $\mathbf{R}_T$ в $\mathbf{R}_T$.

Аффинный объект в $\mathcal{E}$ есть $\mathcal{E}$-объект a вместе с двумя совокупностями морфизмов Φ, Ψ:

$$\Phi \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbf{R}_T, a), \quad \Phi \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(a, \mathbf{R}_T),$$

такими, что выполняются следующие условия:

1) для любых $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ имеем $\psi \circ \varphi \in \Gamma$;

2) если $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbf{R}_T, a) \setminus \Phi$, то существует $\psi \in \Psi$ такой, что $\psi \circ f \notin \Gamma$;

3) если $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(a, \mathbf{R}_T) \setminus \Psi$, то существует $\varphi \in \Phi$ такой, что $f \circ \varphi \notin \Gamma$;

4) для любых мономорфизмов f: $\Omega \rightarrowtail a$, g: $\Omega \rightarrowtail \mathbf{R}_T$ существует $\varphi \in \Phi$ такой, что $\varphi \circ g = f$;

5) для любых мономорфизмов f: $\Omega \rightarrowtail a$, g: $\Omega \rightarrowtail \mathbf{R}_T$ существует $\psi \in \Psi$ такой, что $\psi \circ f = g$.

Здесь Ω – классифицирующий объект в $\mathcal{E}$.

В категории Set аффинные объекты являются множествами, оснащенными структурой аффинного пространства [4]. В топосе $\mathrm{Bn}(I)$ и пространственном топосе $\mathrm{Top}(I)$ (обозначения, как в [5]) аффинный объект есть расслоение с базой I и со слоем, являющимся аффинным пространством.

Не каждый топос с объектом вещественных чисел имеет аффинный объект. Таковым, например, является топос M_2 – Set.

Категорное описание специальной и общей теорий относительности предполагает задание либо в аффинном пространстве, либо в расслоенном пространстве со слоем, являющимся аффинным пространством, соответственно лоренцевой структуры, т.е. квадратичной формы g_{ij}. Это можно сделать, задав в аффинном пространстве семейство равных и параллельных эллиптических конусов [7].

Ниже будем использовать определения, понятия и обозначения из [5].

Пусть a – аффинный объект в топосе $\mathcal{E}$. Порядок в a – это $\mathcal{E}$-объект P и совокупность подобъектов $\{p_x\colon P \rightarrowtail a\}$, где $x\colon 1 \to a$ – произвольный элемент, такие, что: 1) $x \in p_x$; 2) если $y \in p_x$, то для любого $z \in p_y$ следует $z \in p_x$.

Используем далее обозначение $\mathcal{P} = \langle P, \{p_x\} \rangle$ для порядка в a.

Морфизм $f\colon a \to a$ называется аффинным, если для любых $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ имеем $\psi \circ f \circ \varphi \in \Gamma$.

Обозначим: $\mathrm{Aff}(a)$ – совокупность всех аффинных морфизмов объекта a, и пусть $\mathcal{A} \subset \mathrm{Aff}(a)$ состоит из коммутирующих морфизмов.

Порядок $\mathcal{P}$ инвариантен относительно $\mathcal{A}$, если для любых p_x, p_y существует $g_{xy} \in \mathcal{A}$ такой, что $g_{xy} \circ p_x = p_y$. Морфизм $f\colon a \to a$ сохраняет порядок $\mathcal{P}$, если для любого p_x существует p_y такой, что $f \circ p_x = p_y$.

Совокупность морфизмов, сохраняющих инвариантный относительно $\mathcal{A}$ порядок $\mathcal{P}$, обозначим $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$.

Луч – это морфизм $\lambda\colon \mathbf{R}^+ \rightarrowtail \mathbf{R}_T \xrightarrow{\varphi} a$, где $\varphi \in \Phi$. Здесь $\mathbf{R}^+$ – это подобъект объекта $\mathbf{R}_T$, состоящий из тех t, для которых $0 \leqslant t$ (см. определение порядка в $\mathbf{R}_T$ в [3]). Порядок $\mathcal{P}$ называется коническим, если: 1) для любого $y \in p_x$ существует луч $\lambda \subset p_x$ такой, что $x, y \in \lambda$; 2) элемент x есть начало луча λ, т.е. если λ' – луч и $y \in \lambda' \subset \lambda$, $\lambda' \neq \lambda$, то $x \notin \lambda'$.

Порядок $\mathcal{P}$ имеет острую вершину, если для любого p_x не существует $\varphi_x \in \Phi$ такого, что $\varphi_x \subset p_x$. Порядок полный, если для любых элемента $z\colon 1 \to a$ и p_x существуют различные элементы $u_x, v_x\colon 1 \to a$ и $\varphi \in \Phi$ такие, что $z, u_x, v_x \in \varphi$ и $u_x, v_x \in p_x$.

Элемент $u \in p_x$ называется крайним, если существует $\varphi \in \Phi$ такой, что $u \in \varphi$, но для любого $y \in p_x$ следует $y \notin \varphi$.

Конический порядок $\mathcal{P}$ называется строгим, если для каждого элемента $u \in p_x$, не являющегося крайним, и любого $v \in p_x$, какой бы ни был луч λ с началом u такой, что $v \in \lambda$, существует крайний элемент $w \in \lambda$ и $w \in p_x$.

Аффинный объект a с полным с острой вершиной строгим коническим инвариантным относительно $\mathcal{A}$ порядком $\mathcal{P}$ называется лоренцевым, если для каждых $x\colon 1 \to a$ и крайних элементов $u, v \in p_x$, где $u, v \neq x$, существует $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ такой, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] & & a \\ & 1 \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] & & a \\ & 1 \arrow[ul, "x"] \arrow[ur, "x"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативны.

Теорема 1. *Лоренцев объект a в категории* Set *– это аффинное пространство, допускающее псевдоевклидову структуру, задаваемую квадратичной формой*

$$x^{02} - \sum_{k=1}^{n} x^{k2},$$

где n конечно или ∞, и $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ *– группа Пуанкаре с добавлением подобий. Лоренцев объект в* $\mathrm{Top}(I)$ *– это расслоение над I со слоем, оснащенным аффинной и псевдоевклидовой непрерывной структурами конечной или бесконечной размерности.*

Таким образом, язык теории топосов позволяет единым способом аксиоматизировать специальную и общую теории относительности. Причем для этого используется один и тот же список аксиом. Выделение той или иной физической теории происходит посредством выбора конкретного топоса. Вполне возможно брать не только топосы Set, Bn(I) или Top(I), но и любые иные, обладающие аффинным объектом. Это означает наличие совершенно новых обобщений теории относительности.

Наконец отметим, что поскольку проблема выделения топоса Set, точнее, категорное описание теории множеств, а также выделение пространственного топоса Top(I) в классе элементарных топосов давно решена [6], то можно говорить о решении задачи категорного описания теории относительности.

Теорема 2. *Если* $\mathcal{E}$ *– точечный топос, удовлетворяющий аксиоме частичной транзитивности с лоренцевым объектом* a, *то* $\mathcal{E}$ *– модель теории множеств* Z, *а* "a"*– модель специальной теории относительности, т.е. псевдоевклидова пространства конечной или бесконечной размерности. Если* $\mathcal{E}$ *– топос, определенный над* Set, *имеет достаточно много точек и удовлетворяет аксиоме* (SG) (*см.* [6]), *то* $\mathcal{E}$ *– топос* Top(I), *а* "a"*– расслоение над* I *со слоем, наделенным псевдоевклидовой структурой.*

Имеется еще одна возможность использования теории топосов для математического описания пространства–времени. Можно попытаться достичь желаемой простоты при аксиоматизации теории относительности за счет отказа от классического воззрения на пространство–время как на мир событий, "помещенный" в одно "пространство". Для этого вводится частично упорядоченное множество P и контрвариантные функторы из категории предпорядка P в категорию Set. Возникает топос Set^P, который и есть новое математическое пространство–время. Значениями функтора F на элементах x множества P будут множества $F(x)$. Множество P интерпретируем как совокупность возможных ситуаций получения значения о прошлом. Оно имеет (временной) частичный порядок. Множество $F(x)$ – это (причинный) конус прошлого, состоящий из событий, наблюдаемых в ситуации x. Функтор F можно интерпретировать как поток времени. Топос Set^P – всевозможные потоки времени. Нетрудно увидеть, что классическому преобразованию Лоренца будет соответствовать естественный изоморфизм двух функторов, т.е. потоков времени.

Таким образом, пространство–время Set^P, которое может быть описано как топос Гротендика, уже не "помещается" в одном "пространстве".

Омский государственный
университет

Поступило
7 III 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуц А.К.* – УМН, 1982, т. 37, № 2, с. 39–79. 2. *Пименов Р.И.* Хроногеометрия: достижения, препятствия, структуры. Препринт Коми фил. АН СССР. Сыктывкар, 1987, № 160. 22 с. 3. *Stout L.N.* – Cah. topol. et geom. diff., 1976, vol. 17, № 3, p. 295–326. 4. *Ионин В.К.* – Геометр. сб., Томск, 1982, № 33, с. 3–16. 5. *Голдблатт Р.* Топосы. М.: Мир, 1983. 486 с. 6. *Джонстон Д.* Теория топосов. М.: Мир, 1987. 438 с. 7. *Абдрахимова Н.Р., Гуц А.К., Шаламова Н.Л.* – ДАН, 1988, т. 303, № 4, с. 777–781.