Математические структуры и моделирование
2022. № 1 (61). С. 26–33

УДК 530.12:523-52
DOI 10.24147/2222-8772.2022.1 .26-33

УРАВНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ КИББЛА И ОТСУТСТВИЕ БАРИОННОГО ЧИСЛА У СТАТИЧНОЙ ЧЁРНОЙ ДЫРЫ В ТЕТРАДНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье доказывается теорема в рамках тетрадной теории гравитации, при выполнении условий которой на скалярное поле можно утверждать, что статичная чёрная дыра не имеет скалярных «волос» Киббла. Иначе говоря, такая чёрная дыра характеризуется только одной физической величиной – массой, и у неё нет барионного числа.

Ключевые слова: тетрадная теория гравитации, скалярное поле, no hair theorem.

Известно, что статичные чёрные дыры в общей теории относительности (ОТО) характеризуются только массой, а в случае учёта электромагнитных полей ещё и электрическим зарядом. Отсутствие барионного числа у статичной чёрной дыры было доказано Бекельштейном в 1972 г. [1, 2].

В статье показывается, при выполнении каких условий статичная чёрная дыра в тетрадной теории гравитации не имеет скалярных «волос» Киббла (no hair theorem). Результат был получен в 1977 г. Для другого уравнения скалярного поля аналогичный результат был анонсирован в [3–5] и опубликован в [6].

1. Тетрадная теория гравитации

В тетрадной теории гравитации (ТТГ) гравитация описывается тетрадным полем $\lambda^i_{(a)}, a = 0, 1, 2, 3$, которое связано с метрическим тензором соотношениями:

$$g^{ik} = \eta^{(ab)}\lambda^i_{(a)}\lambda^k_{(b)},$$

где $\eta^{(ab)} = diag\{+1, -1, -1, -1\}$ – тензор Минковского.

Уравнения Эйнштейна для метрического поля g_{ik} в ТТГ заменяются уравнениями Эйнштейна для тетрадного поля в форме

$$\boxed{R^i_{(a)} - \frac{1}{2}\lambda^i_{(a)}R = \varkappa T^i_{(a)}.}$$

Тетрадная теория гравитации впервые появилась в работе Эйнштейна, который искал аппарат для единой теории гравитации и электромагнетизма [7]. Это был частный случай ТТГ, именуемой в наше время телепараллельной теорией гравитации. В ней использовалось пространство-время с абсолютным параллелелизмом. Однако Эйнштейн отказался от неё, поскольку в рассмотренном им варианте тетрадной теории не было решения Шварцшильда. В 1960-е гг. к тетрадной теории обратился Мёллер [8, с. 38] и *показал, каким образом можно решить проблему вычисления гравитационной энергии*.

ТТГ имеет ещё одно важное достижение. Ряд решений уравнений общей теории относительности (ОТО), в том числе решения, отвечающие различным космологическим моделям и коллапсу достаточно массивных звёзд, например известные решения Шварцшильда (статичная чёрная дыра) и Фридмана, как известно, имеют «истинные» сингулярности, когда плотность $\rho \to +\infty$ и (или) некоторые компоненты тензора кривизны $R_{iklm} \to +\infty$. В ТТГ *найдены аналогичные решения уравнений поля без сингулярностей* [10].

Более того, тетрадную теорию гравитации без сингулярностей удаётся построить, правда с изменением уравнений поля, в случае выбора лагранжиана в виде

$$L = \underbrace{\gamma_{rst}\gamma^{tsr} - \gamma^{n}_{sn}\gamma^{sn}_{n}}_{\text{Эйнштейн}} + \alpha L',$$

где L' – однородная функция четвёртой степени от $\lambda^{n}_{a,s}$, α – постоянная, имеющая размерность квадрата длины [11, с. 104],

$$\gamma_{ikl} = \lambda^{(a)}_{i}\nabla_l \lambda_{k(a)} = -\gamma_{kil}.$$

В 1980-е годы интерес к ТТГ угас. Однако с конца 1990-х к ТТГ обращаются вновь многие авторы [9, 10, 12–16].

Далее латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а греческие – 1, 2, 3.

2. Формулы тетрадного формализма и уравнения тетрадного поля

Пусть $\lambda^{i}_{(a)}, \lambda_{i(a)}$ обозначают соответственно контрвариантные и ковариантные компоненты тетрады, отмечаемой индексом (a), причём

$$\lambda^{i(a)} = \eta^{(ab)}\lambda^{i}_{(b)}, \quad \lambda^{i}_{(a)} = \eta_{(ab)}\lambda^{i(b)}, \quad g_{ik}\lambda^{i}_{(0)}\lambda^{k}_{(0)} > 0,$$

где $\eta_{(ab)} = diag\{1, -1, -1, -1\}$ – метрический тензор Минковского. Связь между тетрадным полем и метрическим полем даётся соотношениями

$$g_{ik} = \lambda_{i(a)}\lambda^{(a)}_{k}, \quad g^{ik} = \lambda^{i}_{(a)}\lambda^{k(a)}, \quad \lambda^{i}_{(a)}\lambda^{(a)}_{k} = \delta^{i}_{k}.$$

Тетрадное поле задаётся с точностью до *локальных* лоренц-поворотов

$$\lambda^{i}_{(a)} \to \Omega^{(b)}_{(a)}(x)\lambda^{i}_{(b)}, \tag{1}$$

$$\eta_{ab} = \eta_{cd}\Omega^{(c)}_{(a)}(x)\Omega^{(d)}_{(b)}(x).$$

Последнее равенство показывает, что $||\Omega^{(b)}_{(a)}(x)||$ – однородное преобразование Лоренца. В случае, когда функции $\Omega^{(b)}_{(a)}(x)$ являются постоянными, говорят, что имеем *глобальные* лоренц-повороты тетрады.

Тетрада $\lambda^i_{(a)}$ позволяет формировать локальные объекты из тензоров:

$$V_{(a)} = \lambda^i_{(a)}V_i, \quad V^{(a)} = \lambda^{(a)}_i V^i,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(a)}} = \lambda^i_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$A^k_{j(a)} = \lambda^m_{(a)}A^k_{jm}, \quad W^{(ab)} = \lambda^{(a)}_i\lambda^{(b)}_j W^{ij}, ...$$

3. Уравнение скалярного поля Киббла

В общей теории относительности (ОТО) уравнение скалярного поля имеет вид:

$$\left(g^{ik}\nabla_i\nabla_k + \mu^2\right)\varphi = 0, \tag{2}$$

где ∇_i – ковариантная производная относительно римановой связности по переменной x^i.

В ТТГ Киббл [18] вводит следующий лагранжиан скалярного поля:

$$L = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\nabla_i[\sqrt{-g}\lambda^k_{(a)}\varphi]\nabla_k[\sqrt{-g}\lambda^{(a)k}\varphi] - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\mu^2\varphi^2$$

и соответствующее уравнение

$$g^{ik}\nabla_i\nabla_k\varphi + (\mu^2 + \nabla_k G^k - G_i G^i)\varphi = 0, \tag{3}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right) + (\mu^2 + \nabla_k G^k - G_i G^i)\varphi = 0, \tag{4}$$

так как

$$g^{ik}\nabla_i\nabla_k\varphi = \nabla_i\left(g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right),$$

где

$$G^n \equiv \lambda^{n(s)}\nabla_k\lambda^k_{(s)}. \tag{5}$$

4. Внешнее скалярное поле чёрной дыры в тетрадной теории гравитации

Будем под ТТГ понимать теорию, уравнения поля в которой совпадают с уравнениями Эйнштейна. Скалярное поле описываем уравнением Киббла.

Определение 1. Вакуумное решение $\lambda^i_{(a)}$ уравнений поля описывает чёрную дыру в ТТГ, если метрика $g_{ik} = \eta_{(ab)}\lambda^{(a)}_i\lambda^{(b)}_k$ описывает чёрную дыру в ОТО. Причём чёрная дыра – это компактный объект в 3-пространстве.

Определение 2. Поле $\lambda^i_{(a)}$ статично, если его компоненты не зависят от временной координаты x^0 и $\lambda^{(a)}_0 = \lambda^{(0)}_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, 3)$.

Будем предполагать, что метрика g_{ik} асимптотически плоская, и во внешней области чёрной дыры координаты x^i выбраны так, что g_{ik} на бесконечности переходят в компоненты метрики Шварцшильда, заданные в сферических координатах. Горизонт событий F описывается уравнением $F(x^1, x^2, x^3) = 0$, и нормаль n_i к нему, а также элемент поверхности dS_i имеют нулевую временную компоненту, и поскольку это световая (изотропная) поверхность, то

$$dS_\alpha dS^\alpha = 0.$$

Теорема 1. *Пусть $\lambda^i_{(a)}$ – статичное гравитационное поле, описывающее чёрную дыру, а $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ – статичное внешнее скалярное поле Киббла. Если выполнены условия:*

1) $b_i b^i$, где $b^i = \sqrt{-g} g^{ik} \varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^k}$, ограничено на горизонте;

2) $\nabla_m G^m \geqslant 0$ и $\nabla_m G^m \neq 0$ хотя бы в одной точке вне горизонта, то $\varphi \equiv 0$, т. е. чёрная дыра не имеет внешнего скалярного поля.

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g} g^{ik} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right) = \varphi \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k},$$

то, подставляя это равенство в уравнение (4), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g} g^{ik} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right) + \sqrt{-g}\mu^2\varphi^2 - \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \sqrt{-g}\nabla_k G^k \varphi^2 - \sqrt{-g} G_i G^i \varphi^2 = 0.$$

Интегрируем полученное уравнение по внешности чёрной дыры до пространственной бесконечности $r = +\infty$ и по времени x^0 от x^0_1 до x^0_2 — области Ω:

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g} g^{ik} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right) d^4x + \\ + \int\limits_\Omega \left(\mu^2\varphi^2 - g^{ik}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \nabla_k G^k \varphi^2 - G_i G^i \varphi^2\right)\sqrt{-g}\, d^4x = 0. \qquad (6)$$

Для первого интеграла в (6) в силу статичности метрики g_{ik} и равенства $dS_0 = 0$ имеем

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g} g^{ik} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right) d^4x = \int\limits_{F\times[x^0_1, x^0_2]} \sqrt{-g} g^{ik} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} n_i dS = \int\limits_{F\times[x^0_1, x^0_2]} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} n_\alpha dS,$$

$$= \int\limits_{F\times[x^0_1, x^0_2]} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} dS^\beta,$$

где $dS_i = n_i dS$ – элемент поверхности, $n_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}$, $n_0 = 0$.

Используя неравенство Шварца

$$[g_{\alpha\beta} b^\alpha dS^\beta]^2 \leqslant [g_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta][g_{\alpha\beta} dS^\alpha dS^\beta],$$

где

$$b^\alpha = \sqrt{-g} g^{\alpha\gamma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^\gamma},$$

а также то, что на горизонте $g_{\alpha\beta} dS^\alpha dS^\beta = 0$, и условие 1 теоремы, получаем, что

$$g_{\alpha\beta} b^\alpha dS^\beta = 0.$$

Следовательно, первый интеграл в (6) равен нулю и уравнение сводится к равенству

$$\int\limits_\Omega \left(\mu^2 \varphi^2 - g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \nabla_k G^k \varphi^2 - G_i G^i \varphi^2\right) \sqrt{-g} d^4 x = 0, \tag{7}$$

или, с учётом статичности чёрной дыры и скалярного поля,

$$\int\limits_\Omega \left(\mu^2 \varphi^2 - g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} + \nabla_k G^k \varphi^2 - G_i G^i \varphi^2\right) \sqrt{-g} d^4 x = 0. \tag{8}$$

Поскольку чёрная дыра статичная и

$$G_0 = \lambda_0^{(s)} \nabla_k \lambda^k_{(s)} = 0 \cdot \nabla_k \lambda^k_{(s)} = 0,$$

то равенство (8) сводится к

$$\int\limits_\Omega \sqrt{-g} \left(\mu^2 \varphi^2 - g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} + \nabla_\mu G^\mu \varphi^2 - g^{\alpha\beta} G_\alpha G_\beta \varphi^2\right) \sqrt{-g} d^4 x = 0. \tag{9}$$

Квадратичная форма $|| - g_{\alpha\beta}||$ положительно определена; все слагаемые подынтегральной функции в (9) в силу условия 2, в частности, неотрицательны. Если хотя бы одно из слагаемых хотя бы в одной точке больше нуля, то сам интеграл будет отличен от нуля. Поэтому

$$\varphi^2 \equiv 0, \text{или} \quad \varphi \equiv 0.$$

■

Литература

1. Bekenstein J. Nonexistence of Baryon Number for Static Black Holes // Phys. Rev. 1972. V. D5, No. 6. P. 1239–1246.
2. Teitelboim C. Nonmeasurability of the Baryon Number of a Black-Hole // Lett. Nuov. Cim. 1972. V. 3. P. 326–328.

3. Гуц А.К. О внешнем скалярном поле чёрной дыры в тетрадной теории гравитации // Материалы третьей отчётной научно-практической конференции Омского университета. Омск : ОмГУ, 1977. С. 60–62.
4. Гуц А.К. Уравнение скалярного поля в тетрадной теории гравитации / Учёный совет мат. фак. ОмГУ. Деп. в ВИНИТИ 02.12.92, № 3426–В92. 12 с.
5. Гуц А.К. Физика реальности. Омск: Изд-во КАН, 2012. 424 с.
6. Гуц А.К. Отсутствие скалярных «волос» у статичной чёрной дыры в тетрадной теории гравитации // Математические структуры и моделирование. 2021. № 3(59). С. 28–38.
7. Einstein A. Riemann-Geometrie mit Aujrechterhaltungdes Begriffes des Fernparallelismus // Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. K. 1. 1928. S. 217–221.
8. Меллер Дж. Законы сохранения в тетрадной теории гравитации / В сб.: Гравитация и топология. Актуальные проблемы. М. : Мир, 1966.
9. Mikhail F.I., Wanas M.I., Lashin E.I., Hindawi A. Sphericaly symmetric solutions in Möller's tetrad theory of gravitation. URL: `https://arxiv.org/pdf/1908.10757.pdf` (дата обращения: 01.10.2021).
10. Nashed G.G.L. Vacuum Non Singular Black Hole in Tetrad Theory of Gravitation. 2001. URL: `https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0109017v1.pdf` (дата обращения: 01.10.2021).
11. Мёллер Х. Неизбежны ли сингулярности в теории гравитации? // Проблемы физики: классика и современность. М. : Мир, 1982. С. 99–126.
12. Nashed G.G.L. Energy Momentum Complex // Brazilian Journal of Physics. 2010. V. 40, N. 3. P. 315–318.
13. Nashed G.G.L., Shirafuji T. Reissner-Nordström Spacetime in the Tetrad Theory of Gravitation. 2007. URL: `https://arxiv.org/pdf/0704.3898v1.pdf` (дата обращения: 01.10.2021).
14. Alhendi H.A., Lashin E.I., Nashed G.L. The Cosmology of Tetradic Theory of Gravitation. 2007. URL: `https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0702139v1.pdf` (дата обращения: 01.10.2021).
15. Shevchenko L.P. Tetrad-Gauge Theory of Gravity // Theoretical and Mathematical Physics. 2018. V. 194. P. 450–470.
16. Mitsou E., Yoo J. Tetrad formalism for exact cosmological observables. 2020. URL: `https://arxiv.org/pdf/1908.10757.pdf` (дата обращения: 01.10.2021).
17. Бабурова О.В., Королев В.Ф., Умярова И.А. Вариационный формализм для квадратичных лагранжианов в тетрадной теории гравитации // Известия высших учебных заведений. Физика. 2006. Т. 49, № 5. С. 70–74.
18. Kibble T.W.B. Lorentz Invariance and the Gravitational Field // Journal of Math. Phys. 1961. V. 2. P. 212–221.

THE KIBBLE EQUATION OF SCALAR FIELD AND THE ABSENCE OF SCALAR "HAIR" IN A STATIC BLACK HOLE IN THE TETRAD THEORY OF GRAVITY

A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. In the article a theorem in the framework of the tetrad theory of gravity is proved, under the conditions of which on a scalar field, it can be argued that a static black hole does not have the Kibble scalar "hairs". In other words, such a black hole is characterized only by one physical quantity – mass, and it has no baryon number

Keywords: tetrad gravity theory, scalar field, no hair theorem.

References

1. Bekenstein J. Nonexistence of Baryon Number for Static Black Holes. Phys. Rev., 1972, vol. D5, no. 6, pp. 1239–1246.
2. Teitelboim C. Nonmeasurability of the Baryon Number of a Black-Hole. Lett. Nuov. Cim., 1972, vol. 3, pp. 326–328.
3. Guts A.K. O vneshnem skalyarnom pole chernoi dyry v tetradnoi teorii gravitatsii. Materialy tret'ei otchetnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii Omskogo universiteta, Omsk, OmGU, 1977, pp. 60–62. (in Russian)
4. Guts A.K. Uravnenie skalyarnogo polya v tetradnoi teorii gravitatsii. Uchenyi sovet mat. fak. OmGU., Dep. v VINIvol. 02.12.92, no. 3426–B92, 12 p. (in Russian)
5. Guts A.K. Fizika real'nosti. Omsk, Izd-vo KAN, 2012, 424 p. (in Russian)
6. Guts A.K. Otsutstvie skalyarnykh "volos" u statichnoi chernoi dyry v tetradnoi teorii gravitatsii. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2021, no. 3(59), pp. 28–38. (in Russian)
7. Einstein A. Riemann-Geometrie mit Aujrechterhaltungdes Begriffes des Fernparallelismus. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.math., K. 1, 1928, S. 217–221.
8. Meller Dzh. Zakony sokhraneniya v tetradnoi teorii gravitatsii. V sb.: Gravitatsiya i topologiya. Aktual'nye problemy. Moscow, Mir, 1966. (in Russian)
9. Mikhail F.I., Wanas M.I., Lashin E.I., and Hindawi A. Sphericaly symmetric solutions in Möller's tetrad theory of gravitation. URL: `https://arxiv.org/pdf/1908.10757.pdf` (01.10.2021).
10. Nashed G.G.L. Vacuum Non Singular Black Hole in Tetrad Theory of Gravitation. 2001. URL: `https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0109017v1.pdf` (01.10.2021).
11. Meller X. Neizbezhny li singulyarnosti v teorii gravitatsii? Problemy fiziki: klassika i sovremennost', Moscow, Mir, 1982, pp. 99–126. (in Russian)
12. Nashed G.G.L. Energy Momentum Complex. Brazilian Journal of Physics, 2010, vol. 40, no. 3, pp. 315–318.

13. Nashed G.G.L. and Shirafuji T. Reissner-Nordström Spacetime in the Tetrad Theory of Gravitation. 2007. URL: `https://arxiv.org/pdf/0704.3898v1.pdf` (01.10.2021).
14. Alhendi H.A., Lashin E.I., and Nashed G.L. The Cosmology of Tetradic Theory of Gravitation. 2007. URL: `https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0702139v1.pdf` (01.10.2021).
15. Shevchenko L.P. Tetrad-Gauge Theory of Gravity. Theoretical and Mathematical Physics, 2018, vol. 194, pp. 450–470.
16. Mitsou E. and Yoo J. Tetrad formalism for exact cosmological observables. 2020. URL: `https://arxiv.org/pdf/1908.10757.pdf` (01.10.2021).
17. Baburova O.V., Korolev V.F., and Umyarova I.A. Variatsionnyi formalizm dlya kvadratichnykh lagranzhianov v tetradnoi teorii gravitatsii. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika, 2006, vol. 49, no. 5, pp. 70–74. (in Russian)
18. Kibble T.W.B. Lorentz Invariance and the Gravitational Field. Journal of Math. Phys., 1961, vol. 2, pp. 212–221.

Дата поступления в редакцию: 04.10.2021