Математические структуры и моделирование
2018. № 2(46). С. 24–32

УДК 515.17
DOI: 10.25513/2222-8772.2018.2.24-32

АФФИННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КАК ГРУПП ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТРЁХМЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru
Г.Б. Гольдина
студент, e-mail: zoloto13@list.ru
А.Н. Кабанов
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: kabanovan@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. С помощью метода Ямагучи дается представление как групп Ли аффинных преобразований всех трехмерных разрешимых групп Ли.

Ключевые слова: Аффинная структура, аффинное представление, трёхмерные разрешимые группы Ли.

Введение

В различных исследованиях группы Ли используются, будучи представленными в форме групп аффинных преобразований в аффинном пространстве. Имеются различные способы построения таких представлений. В этой статье строится аффинное представление 3-мерных разрешимых групп Ли методом Ямагучи [1, 2].

1. Аффинные представления групп Ли

Пусть G – вещественная связная группа Ли. Она допускает *аффинное представление*, если существует гомоморфизм

$$\alpha : G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \cong GL(\mathbb{R}^n),$$

$$G \ni g :\to \alpha(g) \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n),$$

где $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ – группа аффинных преобразований n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, или, равно, общих линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Метод Ямагучи

Пусть дана n-мерная группа Ли G_n, её алгебра Ли $\mathfrak{g}_n$ с базисом $X_1, ..., X_n$. Строим представление

$$\Lambda : \mathfrak{g}_n \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_n),$$

$$\Lambda(X_i) : \mathfrak{g}_n \ni X_j \to \Lambda(X_i)X_j \in \mathfrak{g}_n$$

такое, что

$$\Lambda(X_i)X_j - \Lambda(X_j)X_i = [X_i, X_j]. \tag{1}$$

Рассматриваем алгебру Ли группы Ли $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^n) = \{\left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) : A - n \times n - \text{матрица},\ a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Определяем представление

$$\rho : \mathfrak{g}_n \to \mathfrak{aff}(\mathbb{R}^n),$$

полагая

$$\rho(X) = \left(\begin{array}{c|c} & t_1 \\ \Lambda(X) & \vdots \\ & t_n \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad X = \sum_{i=1}^{n} t_i X_i \in \mathfrak{g}_n,$$

$$\rho(X_i) = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda(X_i) & e_i \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i.$$

Пусть $G(n)$ – аналитическая подгруппа группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ с алгеброй Ли $\rho(\mathfrak{g}_n)$. Тогда $G(n) \cong G_n$ и $G(n)$ действует просто транзитивно на $\mathbb{R}^n = \{(x^1, ..., x^n, 1)^{tr} : x^i \in \mathbb{R}\}$ (см. [1, 2]).

Имеем 1-параметрическую подгруппу $\exp(t_i X_i)$ группы Ли G_n, которой соответствует аффинное преобразование $\exp(t_i \rho(X))$: в $\mathbb{R}^n = \{(x^1, ..., x^n, 1) : x^i \in \mathbb{R}\}$:

$$G_n \ni \exp(t_i X_i) \to \exp(t_i \rho(X)) = e^{t_i \rho(X_i)} \in G(n),$$

$$e^{t_i \rho(X_i)} : \left(\begin{array}{c} x^1 \\ \vdots \\ x^n \\ \hline 1 \end{array}\right) \to e^{t_i \rho(X_i)} \left(\begin{array}{c} x^1 \\ \vdots \\ x^n \\ \hline 1 \end{array}\right), \quad t_i \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Преобразования (2) порождают аффинное представление $\alpha(G_n)$:

$$\alpha : G_n \to GL(\mathfrak{g}_n) \cong GL(\mathbb{R}^n),$$

$$\alpha(\exp(t_i\Lambda(X_i)))\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = e^{t_i\Lambda(X_i)}\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + t_ie_i, \quad t_i \in \mathbb{R},$$

$$\exp : \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_n) \to GL(\mathfrak{g}_n)$$

группы Ли G_n с параметрами $(t_1, ..., t_n)$, действующее просто транзитивно на $\mathbb{R}^3$, если, конечно, можно найти матрицы $\Lambda(X_i)$, удовлетворяющие условиям (1) [1].

3. Построение аффинных представлений 3-мерных групп Ли

Теорема 1. *Любая связная 3-мерная разрешимая вещественная группа Ли G_3 имеет аффинное представление $\alpha(G_3)$, действующие просто транзитивно на $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Используем классификацию 3-мерных вещественных разрешимых алгебр Ли из [3].

1. C_3I.

$$[X_i, X_j] = 0.$$

Здесь $\Lambda(X_i) = 0$, поэтому

$$\rho(X_i) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e_i \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad exp(t_i\rho(X_i)) = \left(\begin{array}{c|c} E & t_ie_i \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{array}{l} (x^1, x^2, x^3) \to (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) \to (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) \to (x^1, x^2, x^3 + t_3). \end{array} \tag{3}$$

Следовательно, имеем аффинное представление абелевой группы G_3I:

$$(x^1, x^2, x^3) \to (x^1 + t_1, x^2 + t_2, x^3 + t_3).$$

2. C_3II.

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1,$$

$$\Lambda(X_1) = \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$e^{t_1\rho(X_1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right), \quad e^{t_2\rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right),$$

$$e^{t_3\rho(X_3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{aligned} &(x^1, x^2, x^3) \to (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ &(x^1, x^2, x^3) \to (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ &(x^1, x^2, x^3) \to (x^1 - t_3 x_2, x^2, x^3 + t_3). \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, группа Ли G_3II имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = x^1 - t_3 x^2 + t_1, \\ \overline{x}^2 = x^2 + t_2, \\ \overline{x}^3 = x^3 + t_3. \end{cases} \tag{5}$$

3. C_3III.

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1,$$

$$\Lambda(X_1) = \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$e^{t_1\rho(X_1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right), \quad e^{t_2\rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right),$$

$$e^{t_3\rho(X_3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} e^{-t_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{aligned} &(x^1, x^2, x^3) \to (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ &(x^1, x^2, x^3) \to (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ &(x^1, x^2, x^3) \to (e^{-t_3}x^1, x^2, x^3 + t_3). \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, группа Ли G_3III имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = e^{-t_3}x^1 + t_1, \\ \overline{x}^2 = x^2 + t_2, \\ \overline{x}^3 = x^3 + t_3. \end{cases} \tag{7}$$

4. C_3IV.

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1 + X_2, \quad [X_3, X_1] = -X_1,$$

$$\Lambda(X_1) = \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$e^{t_1\rho(X_1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right), \quad e^{t_2\rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right),$$

$$e^{t_3\rho(X_3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t_3^n}{n!} & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t_3^n}{(n-1)!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t_3^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{aligned} &(x^1, x^2, x^3) \to (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ &(x^1, x^2, x^3) \to (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ &(x^1, x^2, x^3) \to (e^{-t_3}x^1 + t_3e^{-t_3}x_2, e^{-t_3}x^2, x^3 + t_3). \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, группа Ли G_3IV имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = e^{-t_3}x^1 + t_3e^{-t_3}x^2 + t_1, \\ \overline{x}^2 = e^{-t_3}x^2 + t_2, \\ \overline{x}^3 = x^3 + t_3. \end{cases} \tag{9}$$

5. C_3V.

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_2, \quad [X_3, X_1] = -X_1,$$

$$\Lambda(X_1) = \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$e^{t_1\rho(X_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right), \quad e^{t_2\rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right),$$

$$e^{t_3\rho(X_3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} e^{-t_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{array}{l} (x^1, x^2, x^3) \to (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) \to (x^1, x^2 + t_2, x^3), \\ (x^1, x^2, x^3) \to (e^{-t_3}x^1, e^{-t_3}x^2, x^3 + t_3). \end{array} \tag{10}$$

Таким образом, группа Ли G_3V имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = e^{-t_3}x^1 + t_1, \\ \overline{x}^2 = e^{-t_3}x^2 + t_2, \\ \overline{x}^3 = x^3 + t_3. \end{cases} \tag{11}$$

6. C_3VI.

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = qX_2 \ (q \neq 0, 1), \quad [X_3, X_1] = -X_1,$$

$$\Lambda(X_1) = \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$e^{t_1\rho(X_1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right), \quad e^{t_2\rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right),$$

$$e^{t_3\rho(X_3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} e^{-t_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-qt_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

и соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{aligned} &(x^1, x^2, x^3) \to (x^1 + t_1, x^2, x^3), \\ &(x^1, x^2, x^3) \to (x^1, x_2 + t_2, x^3), \\ &(x^1, x^2, x^3) \to (e^{-t_3}x^1, e^{-qt_3}x^2, x^3 + t_3). \end{aligned} \qquad (12)$$

Таким образом, группа Ли G_3VI имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = e^{-t_3}x^1 + t_1, \\ \overline{x}^2 = e^{-qt_3}x^2 + t_2, \\ \overline{x}^3 = x^3 + t_3. \end{cases} \qquad (13)$$

7. C_3VII.

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = -X_1 + qX_2 \ (q^2 < 1), \quad [X_3, X_1] = -X_2,$$

$$\Lambda(X_1) = \Lambda(X_2) = 0, \quad \Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$e^{t_1\rho(X_1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right), \quad e^{t_2\rho(X_2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right),$$

$$e^{t_3\rho(X_3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} e^{\frac{-t_3q}{2}}A(t_3) & 2e^{\frac{-t_3q}{2}}B(t_3) & 0 & 0 \\ -2e^{\frac{-t_3q}{2}}B(t_3) & e^{\frac{-t_3q}{2}}C(t_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right),$$

где

$$A(t) = \cos\frac{t(4-q^2)}{2\sqrt{|q^2-4|}} + \frac{q}{\sqrt{|q^2-4|}}\sin\frac{t(4-q^2)}{2\sqrt{|q^4-4|}},$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{|q^2-4|}}\sin\frac{t(4-q^2)}{2\sqrt{|q^4-4|}},$$

$$C(t) = \cos\frac{t(4-q^2)}{2\sqrt{|q^2-4|}} - \frac{q}{\sqrt{|q^2-4|}}\sin\frac{t(4-q^2)}{2\sqrt{|q^4-4|}}.$$

Соответствующее аффинное преобразование

$$\begin{gathered}(x^1,x^2,x^3) \to (x^1+t_1,x^2,x^3),\\ (x^1,x^2,x^3) \to (x^1,x^2+t_2,x^3),\\ (x^1,x^2,x^3) \to (e^{\frac{-t_3q}{2}}[A(t_3)x^1+2B(t_3)_3x_2], e^{\frac{-t_3q}{2}}[-2B(t_3)x^1+C(t_3)x^2], x^3+t_3).\end{gathered} \tag{14}$$

Таким образом, группа Ли G_3VII имеет следующее аффинное представление:

$$\begin{cases}\overline{x}^1 = e^{\frac{-t_3q}{2}}[A(t_3)x^1+2B(t_3)_3x^2]+t_1,\\ \overline{x}^2 = e^{\frac{-t_3q}{2}}[-2B(t_3)x^1+C(t_3)x^2]+t_2,\\ \overline{x}^3 = x^3+t_3.\end{cases} \tag{15}$$

Теорема доказана.

■

Литература

1. Yamaguchi S. On complete affinely flat structures of some solvable Lie groups // Memories of the Faculty of Science, Kyushu Univ., Ser. A. 1979. V. 33, No. 2. P. 209–218.
2. Yamaguchi S. Supplements to "On complete affinely flat structures of some solvable Lie groups"// Memories of the Faculty of Science, Kyushu Univ., Ser. A. 1979. V. 33, No. 2. P. 219–223.
3. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: ФМ, 1961.

AFFINE REPRESENTATIONS AS LIE GROUPS OF TRANSFORMATIONS OF THREE-DIMENSIONAL SOLVABLE LIE GROUPS

A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru
G.B. Goldina
Student, e-mail: zoloto13@list.ru
A.N. Kabanov
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: kabanovan@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. Using the Yamaguchi method, we give the representations as Lie groups of affine transformations of all three-dimensional solvable Lie groups.

Keywords: Affine structures, affine representation, three-dimensional solvable Lie groups.

Дата поступления в редакцию: 30.04.2018