

## РАВНОВЕСНАЯ ДИНАМИКА ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМ С УЧЁТОМ ВЗАИМОСВЯЗИ «РАСТИТЕЛЬНОСТЬ-ПОЧВА»

**Л.А. Володченкова**

к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

**А.К. Гуц**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

**Аннотация.** В статье исследуются равновесные состояния Нэша для лесных экосистем с учётом взаимосвязи «растительность-почва» в рамках теории дифференциальных игр.

**Ключевые слова:** равновесие Нэша, лесная экосистема, почва, растительность, дифференциальные игры.

### Введение

Динамика лесных экосистем описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z, u_1, \dots, u_N), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

с управляющими внешними факторами  $u_1, \dots, u_N$ .

В качестве внешних управляющих факторов рассматриваем такие характеристики лесных фитоценозов, как мозаичность (оконная динамика)  $m$ , межвидовая и внутривидовая конкуренция  $k$ , антропогенное воздействие  $a$ , влажность почвы  $w$  и тип почвообразующей породы  $p$ .

Поэтому можно воспользоваться теорией дифференциальных игр и находить *равновесия Нэша*. Именно обнаружение таких равновесных состояний и является нашей целью.

Заметим, что, как правило, под равновесным состоянием системы, равновесием, понимается *стационарное состояние*, при котором характеризующие его параметры  $z(t)$  не меняются со временем, т. е.

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Такие равновесия изучаются в рамках теории катастроф. Подробности можно посмотреть в наших работах [1–4].

В теории дифференциальных игр каждый управляющий фактор  $u_i$  считается находящимся в распоряжении некоторого игрока, который старается с

его помощью воздействовать на систему таким образом, чтобы иметь максимальный выигрыш или минимальный проигрыш. Выигрыш/проигрыш игрока описывается некоторой заранее заданной функцией  $J_i(z, u_1, \dots, u_N)$ . Очевидно, в реальности трудно предполагать, что факторы могут изменяться совершенно независимо друг от друга, и, следовательно, в системе могут устанавливаться в каком-то смысле равновесия.

Равновесие Нэша в данном случае означает, что если каждый игрок пытается в одностороннем порядке изменить свою стратегию управления, в то время как политика остальных игроков остаётся неизменной, то он имеет худший результат (большой проигрыш).

## 1. Описание взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах

Почва относится к числу основных факторов, определяющих условия произрастания деревьев. Растительность и почва связаны потоками энергии и вещества и совместно с животными и микроорганизмами формируют целостный лесной биогеоценотический покров.

В [1–3] была предложена следующая мозаичная модель четырёхъярусной лесной экосистемы, учитывающая взаимосвязь «растительность-почва», в виде системы дифференциальных уравнений для продукции фитомассы и меры плодородия почвы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} V(x, k, m, a, w), \\ \frac{dy}{dt} = \gamma \cdot [(p - p_0) - y^2]y - \delta \cdot (W - w_-)(W - w_+), \end{cases} \quad (1)$$

$$0 < w_- < w_0 < w_+,$$

$$V(x, k, m, a, w) = \frac{\alpha}{6}(x - x_{\text{ГР}})^6 + k(x - x_{\text{ГР}})^4 + m(x - x_{\text{ГР}})^3 + a(x - x_{\text{ГР}})^2 + w(x - x_{\text{ГР}}),$$

$$k = -c_k(CI - CI_0), \quad m = c_m \left( \frac{s^2}{\mu} - 1 \right),$$

$$a = -c_a(\text{УАН} - \text{УАН}_0), \quad w = A_w(W - w_0),$$

где  $x$  — продукция фитомассы (т/га за год),  $y$  — мера плодородия почвы,  $CI$  — индекс конкуренции Вайса [4];  $s^2/\mu$  — коэффициент дисперсии, являющийся показателем равномерности распределения деревьев в пространстве; если  $s^2/\mu$  близко к нулю, то распределение регулярное, к единице — случайное, а чем более единицы, — тем мозаичнее; УАН — уровень антропогенной нагрузки на район [4],  $p$  — мера типа почвообразующей породы,  $W$  — влажность почвы,  $W_-$  — значение влажности почвы, которое характеризует нехватку воды, и, соответственно,  $W_+$  — её избыток,  $\gamma, \delta$  — положительные константы, коэффициент  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ , где  $\alpha_j$  — доля фитомассы  $j$ -го яруса в фитомассе всего леса,  $c_k, c_m, c_a, c_w$  — постоянные коэффициенты.

Через  $x_{гр}$  обозначена характерная наблюдаемая (измеряемая) для изучаемого типа леса продукция фитомассы в отсутствии сколь-либо серьёзных изменений внешних факторов. Фактически это «исходное значение» продукции фитомассы леса, наблюдаемое на протяжении ряда лет и принимаемое как точка отсчёта при прогнозировании будущих состояний экосистемы.

Величины  $CI_0, УАН_0, W_0$  — это критические значения факторов, обозначающие границы экологической устойчивости фитоценоза [4].

Первое уравнение системы (1) описывает четырёхъярусный лес. Добавление второго уравнения таким способом, как это мы предлагаем, сохраняет все результаты, полученные нами для теоретико-катастрофического описания четырёхъярусного леса и подробно изложенные в [4].

Второе уравнение системы (1) — это уравнение, реализующее упрощённое представление о плодородии почвы и учитывающее только два фактора: тип почвообразующей породы и влажность почвы. Их изменение может привести к скачкообразному изменению плодородия почвы, и это мы смоделировали, вводя в правую часть уравнения катастрофу типа «сборка». В точке  $(p_0, W_-)$  происходит катастрофа падения плодородия, связанная с нехваткой воды в почве, а в точке  $(p_0, W_+)$  — катастрофа падения плодородия при избытке влаги [1].

## 2. Динамика системы «растительность-почва» как дифференциальная игра

Имеем двух игроков. Игрок 1 — это растительность, и ей соответствует внешний фактор  $u = (\alpha, k, m) \in \mathbb{R}^3$ , а игрок 2 — это почва вместе с антропогенными воздействиями на лес, и им отвечает внешний фактор  $v = (p, w, a) \in \mathbb{R}^3$ .

Тогда систему (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha x^5 - x^3 k - x^2 m - w - xa, \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y^3 + \gamma yp - \delta \cdot (w + (w_0 - w_-))(w + (w_0 - w_+)), \end{cases} \quad (2)$$

$$0 < w_- < w_0 < w_+,$$

$$t \in [0, T].$$

Начальное состояние игры — это фиксируемые в момент времени  $t = 0$  значения продукции леса  $x_0$  и плодородия почвы  $y_0$ :

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Цель каждого игрока состоит в том, чтобы максимизировать/минимизировать свой выигрыш/проигрыш, рассчитываемый по формуле:

$$J_i(u, v) = \psi_i(x(T), y(T)) - \int_0^T L_i(t, x(t), y(t), u(t), v(t)) dt. \quad (3)$$

Нахождение равновесия Нэша для системы (2) — крайне сложная задача из-за квадратичного вхождения  $w$  во второе уравнение системы.

### 3. Динамика системы «растительность-почва» для незасушливых регионов

Однако можно искать равновесия, предполагая, что недостаток влаги (засуха) в наших краях — явление крайне редкое, и поэтому можно считать, что  $w$  находится в окрестности параметра  $w_+$ . Иначе говоря, вместо системы (2) будем изучать систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha x^5 - x^3 k - x^2 m - xa - w, \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y^3 + \gamma y p - \delta \cdot (w + (w_0 - w_-)), \end{cases} \quad (4)$$

$$0 < w_- < w_0 < w_+,$$

$$t \in [0, T].$$

Сделаем замену во втором уравнении  $y = \bar{y} + c$ ,  $c = const$  и подберём  $c$  так, чтобы слагаемое в правой части, в которое не входят факторы  $p, w$  при  $\bar{y} = 0$  обращалось в нуль.

Легко найти, что  $c = -(\delta(w_0 - w_-)/\gamma)^{1/3}$ . В результате такой замены мы вместо системы (4) можем изучать, не ограничивая общности, систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha x^5 - x^3 k - x^2 m - xa - w, \\ \frac{dy}{dt} = [-\gamma y^3 - 3\gamma c y^2 - 3\gamma c^2 y - \gamma c^3 - \delta(w_0 - w_-)] + \gamma(y + c)p - \delta w. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тогда систему можно представить в виде

$$\frac{dz}{dt} = f(z) + \sum_{j=1}^5 g_j(z) u_j, \quad (6)$$

где

$$f(z) = \begin{pmatrix} -\alpha x^5 \\ -\gamma y^3 - 3\gamma c y^2 - 3\gamma c^2 y - \gamma c^3 - \delta(w_0 - w_-) \end{pmatrix},$$

$$g_1(z) = \begin{pmatrix} -x^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2(z) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3(z) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_4(z) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\delta \end{pmatrix}, \quad g_5(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(y+c) \end{pmatrix},$$

$$u_1 = k, \quad u_2 = m, \quad u_3 = a, \quad u_4 = w, \quad u_5 = p.$$

Теперь

$$f(0) = 0.$$

Будем считать, что у нас 5 игроков. Игрок 1 — это фактор  $u_1 = k$  — конкуренция деревьев, игрок 2 — это оконная динамика  $u_2 = m$ , определяющая мозаичность фитоценоза, игрок 3 — антропогенное вмешательство  $u_3 = a$  в лесную экосистему (вырубка леса, пожары и т. д.), и, наконец, игрок 4 — влажность почвы  $u_4 = w$ , игрок 5 — мера типа почвообразующей породы  $u_5 = p$ .

Выигрышные функции возьмём в виде:

$$J_i(z, u_1, \dots, u_5) = \int_0^{+\infty} [Q_i(z) + \sum_{j=1}^5 R_{ij}(u_j)^2] dt, \quad (i = 1, \dots, 5) \quad (7)$$

и числа

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geq 0.$$

Рассматриваем игру с ненулевой суммой.

#### 4. Алгоритм нахождения равновесий Нэша

Рассматривать игру с ненулевой суммой вполне разумно, поскольку «выигрыши» наших игроков слабо связаны.

Если игрок формирует «своё» управляющее воздействие в виде только функции времени  $u(t)$  на всю продолжительность игры, то  $u(t)$  — это *программное управление* игрока. Ранее мы называли его, используя термин «управление». Однако игрок может выбирать своё управление в зависимости от того, в каком положении  $x$  в момент времени  $t$  находится система. В таком случае игрок конструирует управляющее воздействие в виде функции  $u(t, x)$ , зависящей уже от позиции  $\{t, x\}$ , и для  $u(t, x)$  используется термин *позиционное управление* игрока [5]. Часто пишут просто  $u(x)$ .

Мы будем искать позиционное управление, позиционное равновесие Нэша. Для дифференциальной игры  $N$ -игроков

$$\frac{dz}{dt} = f(z) + \sum_{j=1}^N g_j(z)u_j, \quad f(0) = 0,$$

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u_j \in \mathbb{R},$$

$$J_i(z, u_1, \dots, u_N) = \int_0^{+\infty} [Q_i(z) + \sum_{j=1}^N R_{ij}(u_j)^2] dt, \quad (i = 1, \dots, N),$$

где числа

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geq 0,$$

существование равновесий Нэша

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*), \quad \forall u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (8)$$

сводится к крайне сложной задаче отыскания решения  $V_i(z)$  нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$\begin{aligned} (\nabla V_i)^T f(z) + Q_i(z) - \frac{1}{2}(\nabla V_i)^T \sum_{j=1}^N g_j(z)(R_{jj})^{-1}(g_j(z))^T(\nabla V_j) + \\ + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N (\nabla V_j)^T g_j(z) R_{ij} [(R_{jj})^{-1}]^2 (g_j(z))^T (\nabla V_j) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\nabla V_i = \begin{pmatrix} (V_i)'_x \\ (V_i)'_y \end{pmatrix}, \quad (\nabla V_i)^T = ((V_i)'_x, (V_i)'_y),$$

по которому строится равновесие Нэша [6, Theorem 10.4-2, утверждение b.]:

$$u_i^*(z) = u_i(V_i(z)) = -\frac{1}{2}R_{ii}^{-1}(g_i(z))^T(\nabla V_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

## 5. Нэшевское равновесие лесной экосистемы (6)-(7)

В нашем случае  $N = 5$ , и рассматриваем  $R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = 1$ ,  $R_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ).

Тогда уравнения Гамильтона-Якоби (9) имеют вид

$$Q_i + (\nabla V_i)^T f(z) - \frac{1}{2}(\nabla V_i)^T F(x) + \frac{1}{4}(\nabla V_i)^T g_i(z)(g_i(z))^T(\nabla V_i) = 0 \quad (11)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

где

$$F(x) = \sum_{j=1}^5 g_j(z)(g_j(z))^T(\nabla V_j).$$

Полагая, что

$$V_1(z) = V_2(z) = V_3(z) = V_4(z) = V_5(z) = \frac{1}{2}x^2 > 0,$$

получаем уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} x^8 + x^6 + x^4 + x^2 \right), \\
 Q_2 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2} \left( x^8 + \frac{1}{2} x^6 + x^4 + x^2 \right), \\
 Q_3 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2} \left( x^8 + x^6 + \frac{1}{2} x^4 + x^2 \right), \\
 Q_4 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2} \left( x^8 + x^6 + x^4 + \frac{1}{2} x^2 \right), \\
 Q_5 &= \alpha x^6 + \frac{1}{2} (x^8 + x^6 + x^4 + x^2).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Следовательно, если  $Q_i$  выбрать именно такими, то уравнения Гамильтона-Якоби выполняются.

Поэтому по теореме 10.4-2 из [6] имеем равновесие Нэша

$$k^* = \frac{1}{2}x^4, \quad m^* = \frac{1}{2}x^3, \quad a^* = \frac{1}{2}x^2, \quad w^* = \frac{1}{2}x, \quad p^* = 0, \tag{13}$$

найденное по формулам (10).

Выигрышные/проигрышные функции поэтому имеют вид:

$$\begin{aligned}
 J_1(x, k, m, a, w, p) &= \int_0^{+\infty} [Q_1(x) + k^2] dt, \\
 J_2(x, k, m, a, w, p) &= \int_0^{+\infty} [Q_2(x) + m^2] dt \\
 J_3(x, k, m, a, w, p) &= \int_0^{+\infty} [Q_3(x) + a^2] dt, \\
 J_4(x, k, m, a, w, p) &= \int_0^{+\infty} [Q_4(x) + w^2] dt, \\
 J_5(x, k, m, a, w, p) &= \int_0^{+\infty} [Q_5(x) + p^2] dt.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Продуктивность  $x$  и мера плодородия почвы  $y$  в случае равновесия Нэша (13) находятся посредством подстановки (13) в уравнения (5) и их интегрированием.

Иначе говоря, требуется решать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x[x^6 + (1 + 2\alpha)x^4 + x^2 + 1], \\ \frac{dy}{dt} = -[\gamma y^3 + 3\gamma cy^2 + 3\gamma c^2 y + \gamma c^3 + \delta(w_0 - w_-)] - \delta x/2. \end{cases} \tag{15}$$

Для  $\gamma = w_0 - w_- = \delta = 1$ ,  $c = -1$  система (15) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x[x^6 + (1 + 2\alpha)x^4 + x^2 + 1], \\ \frac{dy}{dt} = -[y^3 - 3y^2 + 3y] - \frac{1}{2}x. \end{cases} \quad (16)$$

Интегрирование этой системы с  $\alpha = 0,0007$  даёт, например, решения, представленные на рис. 1, 2, 3.

Решения отдельно для первого уравнения системы (15) для  $\alpha = 0,0007$  с разными начальными данными, представлены также на рис. 4.

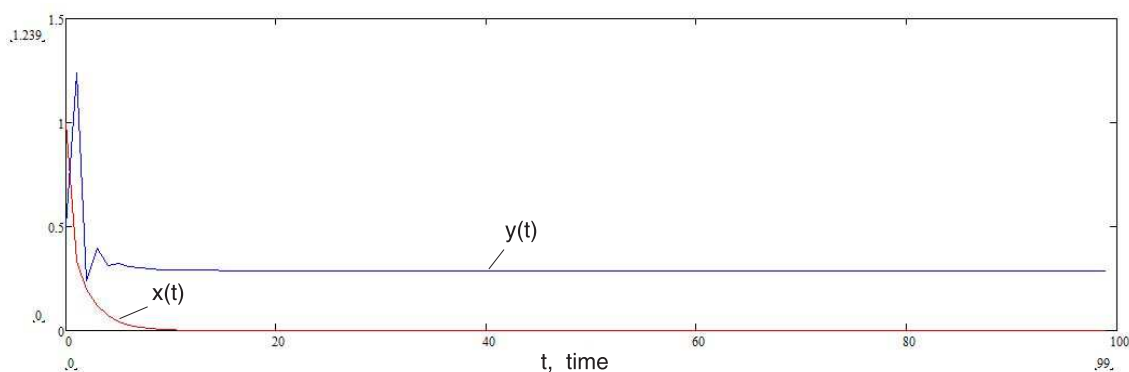


Рис. 1. Динамика продуктивности  $x(t)$  (красный цвет) и меры плодородия  $y(t)$  (синий цвет) в условиях равновесия Нэша (13) с начальным условием  $x(0) = 1$  и  $y(0) = 0,5$  при  $t \in [0, 100]$

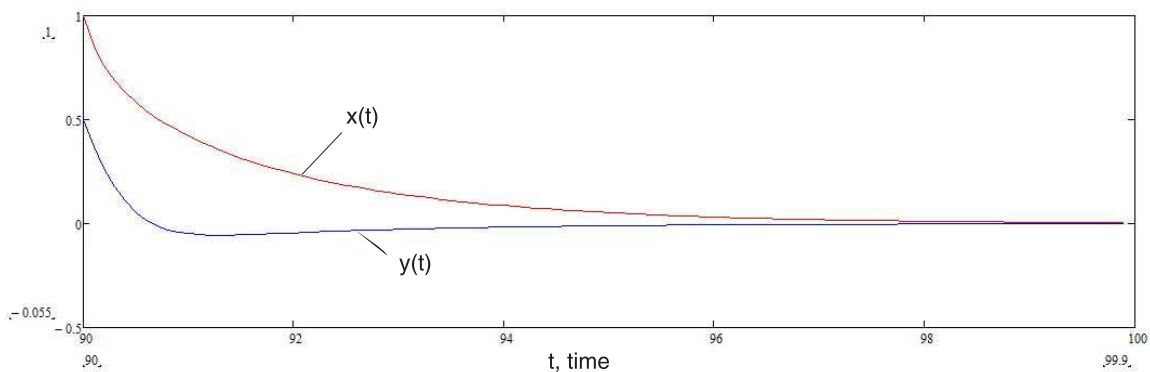


Рис. 2. Динамика продуктивности  $x(t)$  (красный цвет) и меры плодородия  $y(t)$  (синий цвет) в условиях равновесия Нэша (13) с начальным условием  $x(90) = 1$  и  $y(90) = 0,5$  при  $t \in [90, 100]$



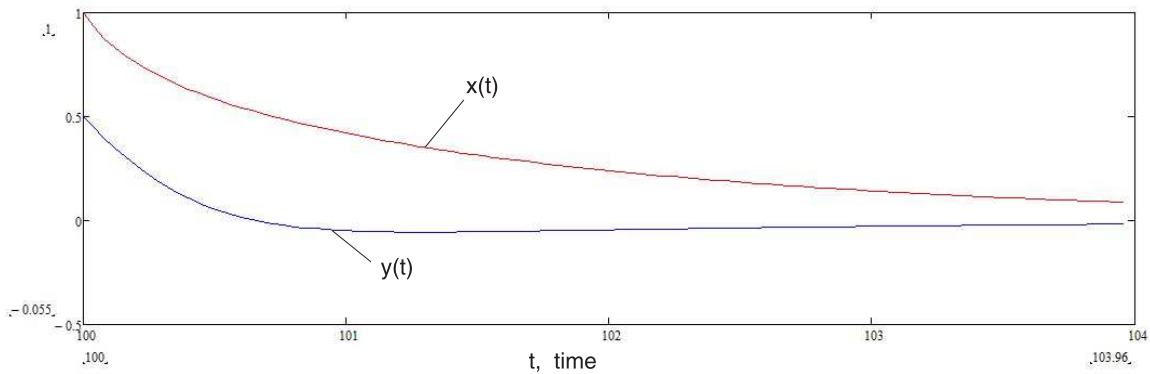


Рис. 3. Динамика продуктивности  $x(t)$  (красный цвет) и меры плодородия  $y(t)$  (синий цвет) в условиях равновесия Нэша (13) с начальным условием  $x(100) = 1$  и  $y(100) = 0,5$  при  $t \in [100, 104]$

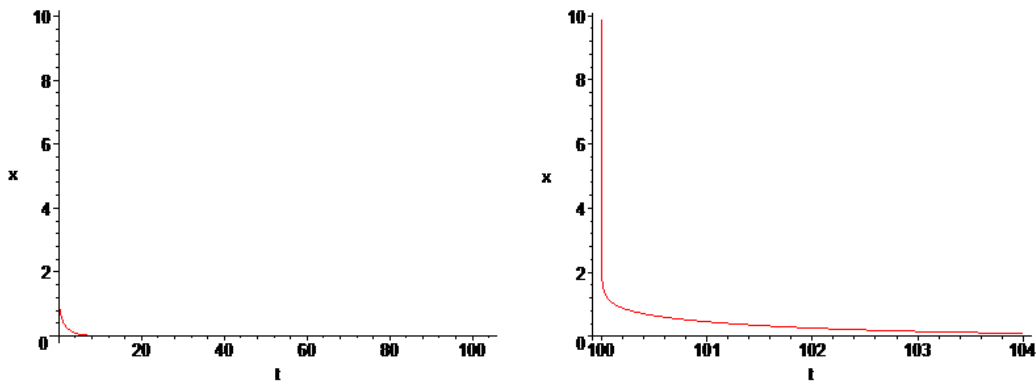


Рис. 4. Продуктивность леса в условиях равновесия Нэша (13). Слева с начальным данным  $x(0) = 10$  при  $t \in [0, 100]$ . Справа с начальным данным  $x(100) = 10$  при  $t \in [100, 104]$

На всех графиках мы видим, что с течением времени продуктивность фитоценоза постепенно асимптотически падает до нуля. Однако если учесть, что система (15) получена, в частности, упрощением исходной системы (1) посредством замены  $x - x_{гр} \rightarrow x$ , то следует говорить об асимптотическом падении продукции фитоценоза постепенно до величины  $x_{гр} > 0$ .

Можно сказать, что лес выходит на финальную стадию. Фактически найденное равновесие Нэша похоже на то, что в лесоведении называется климаксом леса.

Напомним, что *климакс леса* (от греч. *klíмах* — лестница) — это сравнительно зрелая, устойчивая (находящаяся в состоянии динамического равновесия с окружающей средой), «заключительная» стадия формирования фитоценоза, формирования лесной экосистемы.

Однако для позиционного управления (13) мы не можем утверждать, что система (5) является асимптотически устойчивой (теорема 10.4-2, утверждение (а) из [6]). Иначе говоря, возмущения начальных условий могут резко изменить намеченную траекторию развития системы «растительность-почва», и

это плохо соответствует понятию климаксного леса.

Скорее всего, следует говорить о *медленно деградирующем лесе*, поскольку для управления (13) все  $u_i^* > 0$  для  $x > 0$ . Действительно, это означает, что внешние управляющие факторы  $k, a, W$  превысили значения  $CI_0, УАН_0, W_0$ , обозначающие границы экологической устойчивости фитоценоза. Фактически это означает повышенную антропогенную нагрузку на лес и повышенную влажность почвы.

В какой мере второе уравнение может повлиять на первое? Иначе говоря, как ведут себя продуктивность  $x(t)$  и мера плодородия  $y(t)$  в условиях равновесия Нэша (13)?

Как видим, продукция  $x$  по-прежнему монотонно падает, а плодородие почвы со временем сохраняется на определённом уровне.

Фактически нахождение решения для меры плодородия  $y$  требует решения первого уравнения системы (16) относительно  $x$  и подстановки  $x$  во второе уравнение системы (16) с последующим интегрированием. Сделать это не столь просто. Однако из рис. 1 видно, что можно приближённо представить, что

$$t = 1/x + 100 \quad \text{или} \quad x = 1/(t - 100).$$

В таком случае уравнение для меры плодородия имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = -[\gamma y^3 + 3\gamma c y^2 + 3\gamma c^2 y + \gamma c^3 + \delta(w_0 - w_-)] - \delta/2(t - 100).$$

Для  $\gamma = w_0 - w_- = \delta = 1, c = -1$  оно принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = -[y^3 - 3y^2 + 3y] - 1/2(t - 100).$$

Два возможных результата интегрирования даны на рис. 5.

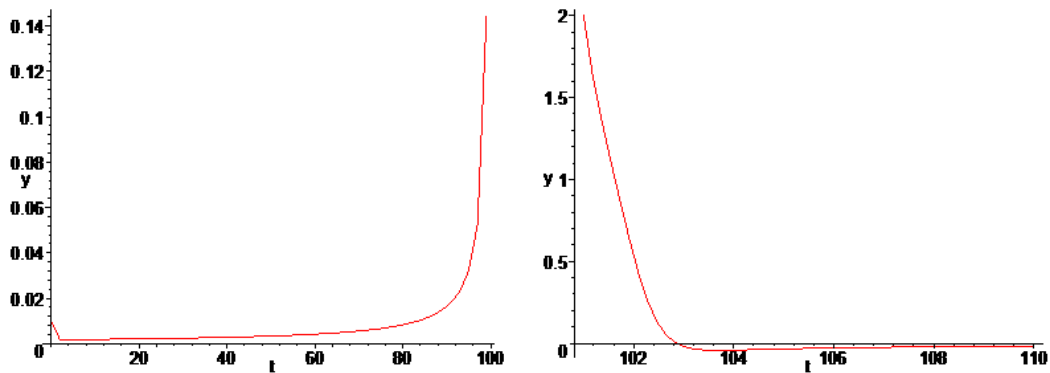


Рис. 5. Динамика меры плодородия в условиях равновесия Нэша (13). Слева с начальным условием  $y(0) = 0,01$  при  $t \in [0, 100]$ . Справа с начальным условием  $y(101) = 2$  при  $t \in [101, 110]$

Мы видим, что вначале плодородие нарастает, а затем после 100 лет – падает. В принципе, это более или менее согласуется с тем, что со временем продуктивность фитоценоза монотонно уменьшается.

## 6. Заключение

В работе [7], где проводилась игра только для одного уравнения продуктивности, нам удалось найти равновесие Нэша, для которого дифференциальное уравнение оказалось асимптотически устойчивым, и в силу этого мы заявили о том, что нашли управление, ведущее к климаксу леса. Для системы «растительность-почва» установить подобное, как сказано выше, нам не удалось. Скорее всего, это временная ситуация, которая разрешится тем, что в будущем будет найдено оптимальное управление, дающее и нэшевское равновесие, и асимптотическую устойчивость системе «растительность-почва». Надежда опирается на то, что в лесоведении существует понятия климаксного леса, основанное на знаниях о реальных лесных экосистемах, находящихся в реальных условиях окружающей среды, в которых растения помещены в почву, а не оторваны от неё.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Математическая модель взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах // Математические структуры и моделирование. 2015. № 3(35). С. 56–60.
2. Володченкова Л.А. Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка» // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.
3. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Теоретико-катастрофическая модель взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 23–24.
4. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Кибернетика катастроф лесных экосистем. Омск : Изд-во КАН, 2012. 220 с.
5. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1979. Т. 17. С. 3–112.
6. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal control. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2012. 540 p.
7. Володченкова Л.А., Гуц А.К. Климаксный лес как нэшевское равновесное состояние лесных экосистем // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1(41). С. 38–44.

**EQUILIBRIUM DYNAMICS OF FOREST ECOSYSTEMS BASED  
ON THE RELATIONSHIP "VEGETATION-SOIL"**

**L.A. Volodchenkova**

Ph.D. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

**A.K. Guts**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

**Abstract.** In the article the Nash equilibrium state for the forest ecosystems based on the relationship "vegetation-soil" and the theory of differential games are investigated.

**Keywords:** The Nash equilibrium, forest ecosystem, soil, vegetation, differential games.

*Дата поступления в редакцию: 07.03.2017*