Математические структуры и моделирование
2016. № 2(38). С. 72–77

УДК 314.1:51-77

ДИНАМИКА СОЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ И ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

А.К. Гуц
профессор, д.ф.-м.н., зав. каф. кибернетики ОмГУ, e-mail: aguts@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. На примере динамики народонаселения показано, что использование интуиционистских дифференциальных уравнений позволяет более полно описывать социальную действительность.

Ключевые слова: Социальные системы, интуиционистская логика, гладкие топосы, народонаселение, равновесные состояния.

Введение

Динамику социальной системы можно представлять с помощью дифференциальных уравнений [1]. Однако описание социальных объектов, как правило, не укладывается в рамки однозначных ответов «да-нет» на возникающие вопросы. Поэтому более естественным является анализ решений дифференциального уравнения, т. е. предсказание будущего социальной системы в рамках паранепротиворечивой или интуиционистской логики. Как показывается в данной заметке, для этого можно воспользоваться инфинитозимальным анализом Кока-Ловера, в основе которого лежит интуиционистская логика.

1. Инфинитозимальный анализ Кока-Ловера

В книгах [2, 3] излагается дифференциальное исчисления, построенное на основе интуиционистской логики. Поле действительных чисел $\mathbb{R}$ расширяется до кольца R за счёт добавления инфинитозималов, т. е. бесконечномалых величин, среди которых есть подмножество чисел

$$D = \{d \in R : d^2 = 0\}.$$

Принимается следующая

Аксиома Ловера. *Если $f : R \to R$ — произвольная функция, то для всякого $d \in D$ имеет место формула*

$$f(x + d) = d(x) + a_x d,$$

где $a_x \in R$, и используется обозначение $a_x = f'(x)$.

В этом инфинитозимальном исчислении все функции $f : R^n \to R$ дифференцируемы и для них справедливы все известные правила дифференцирования. Поэтому можно писать дифференциальные уравнения и искать их решения.

Инфинитозимальный анализ Кока-Ловера не может быть проинтерпретирован в теории множеств Кантора, но имеет интерпретации в так называемых гладких топосах. Одним из них является топос $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathbf{op}}}$ (см. [3,4]).

Числа x из R, функции $f : R \to R$ интерпретируются в $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathbf{op}}}$ в так называемой стадии $\ell C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$ (I конечнопорождённый идеал в $C^\infty(\mathbb{R}^m)$) соответственно как функции $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ или, точнее, $x(a) \mod I$ и m-параметрическое семейство функций $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ или $f(t, a) \mod \pi^*(I)$, $a \in \mathbb{R}^m$ (см. [4, p. 76-78]).

2. Закон Мальтуса

Закон Мальтуса, которому было уделено большое внимание в научных кругах XIX века, утверждает, что численность населения $N(t)$ растёт со временем экспоненциально и описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dN}{dt} = kN(t). \tag{1}$$

Рассматривая это уравнение в рамках синтетического анализа Кока-Ловера и проинтерпретировав его в топосе $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathbf{op}}}$, имеем в стадии $\ell C^\infty(\mathbb{R})/\{a\}$ (см. [3,4])

$$N(t, a) = C(a)e^{k(a)t} \mod \pi^*(\{a\}).$$

Полагаем, что $C(a) = N_0 + a, k(a) = k_0 + a$, $a \in \mathbb{R}$, где $N_0, k_0 \in \mathbb{R}$ — исходная численность населения и принятая скорость роста населения соответственно. Фактически этим мы предположили, что величины $N_0, k_0 \in \mathbb{R}$ заданы, измерены с ошибкой a. Измерение любых числовых величин, как показывает человеческий опыт, никогда не может быть сделано абсолютно точно. В силу этого естественно принять, что все константы, характеризующие реальные объекты и социальные объекты, в частности, описываются посредством числа, к которому добавлена бесконечномалая величина (инфинитозимал).

Следовательно,

$$N(t, a) = (N_0 + a)e^{k_0 t}. \tag{2}$$

Поведение этой функции дано на рис. 1. Тем самым мы имеем более полную картину, характеризующую динамику роста населения и учитывающую ошибки измерения исходных констант.

3. Население. Логистическое уравнение

Примем, что динамика населения описывается логистическим уравнением [1, с. 44]

$$\frac{dN}{dt} = -k(N - N_0)^2 + \mu(N - N_0), \tag{3}$$

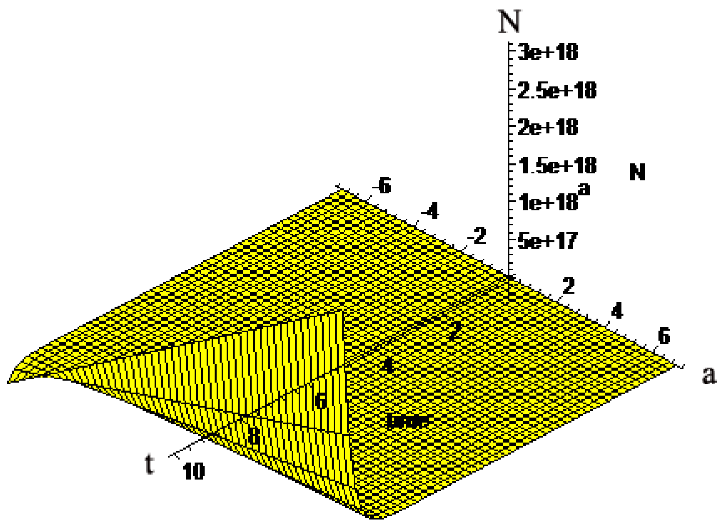

Рис. 1. Функция $N(t, a)$

$$N(0) = N_0,$$

где $k = const > 0$ — определяет лимитирующее ограничение внешней среды, $\mu \in \mathbb{R}$ и μ — изменяющийся параметр, характеризующий скорость роста населения без учёта лимитирующего влияния внешней среды.

Классическое условие стационарных равновесий

$$\frac{dN}{dt} = 0 \tag{4}$$

дает два равновесия

$$N(t) = N_0 \quad \text{и} \quad N(t) = N_0 + \mu/k.$$

В интуиционистском синтетическом анализе Кока-Ловера можно вместо (4) написать следующее условие:

$$\frac{dN}{dt} = d, \quad d^2 = 0. \tag{5}$$

Иначе говоря, мы предполагаем, что процесс отыскания равновесных состояний априори содержит скрытую плохо контролируемую ошибку, связанную с тем, что реальные вычисления всегда производятся с ошибкой, т. е. являются всего лишь приближениями. На практике мы никогда не имеем дела с чистым нулём 0, а лишь с близкой к нему в каком-то смысле величиной $0 + d$.

В таком случае получаем следующее уравнение для стационарных равновесий:

$$k(N - N_0)^2 - \mu(N - N_0) + d = 0. \tag{6}$$

Его решениями при $\mu \neq 0$ являются два равновесия

$$N(t) = N_0 + d/\mu \quad \text{и} \quad N(t) = N_0 + \mu/k - d/\mu. \tag{7}$$

Интерпретации этих двух равновесных поверхностей в топосе $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathbf{op}}}$ в стадии $\ell C^\infty(\mathbb{R})/\{a\}$:

$$N(t) = N_0 + a/\mu \quad \text{и} \quad N(t) = N_0 + \mu/k - a/\mu$$

представлены соответственно на рис. 2 и рис. 3.

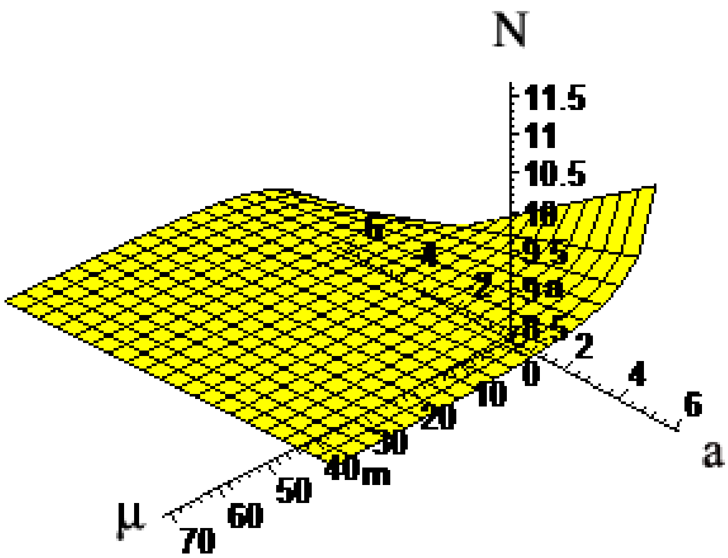

Рис. 2. $N(t) = N_0 + a/\mu$

Мы видим, как ошибка a социологического измерения влияет на поведение равновесия. В классическом случае это не столь наглядно, как в интуиционистском.

Отметим для полноты, что при $\mu = 0$ имеем уравнение равновесий

$$(N - N_0)^2 = -d/k,$$

решением которого является равновесие

$$N = N_0, \quad d = 0.$$

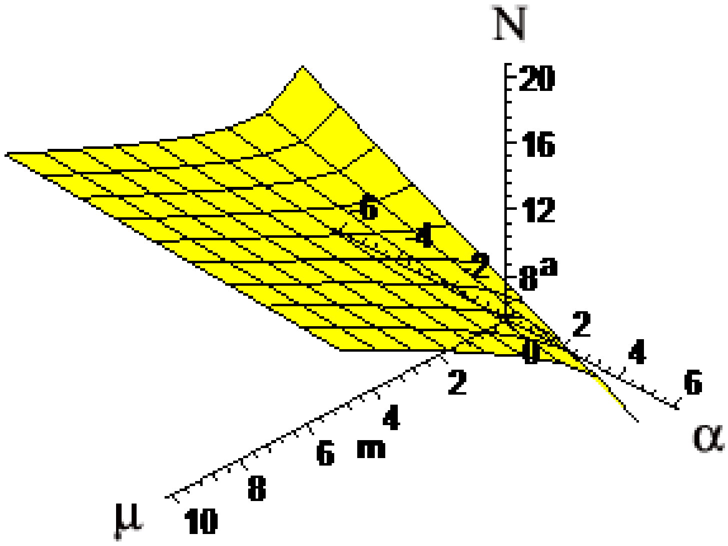

Рис. 3. $N(t) = N_0 + \mu/k - a/\mu$

4. Заключение

Изложенные в этой заметке выкладки, проделанные в дифференциальном исчислении, основанные на интуиционистской логике, более соответствующей логике описания социальных явлений, а конкретно — к оценкам роста населения, позволяют исследовать как рост населения, так и стационарные равновесия при допущении возможных изменений скорости роста населения посредством введения параметра μ одновременно с учётом ошибок социологических измерений, как исходных констант, характеризующих динамику народонаселения, так и того, что принимается за равновесные состояния при описании численности населения.

Литература

1. Гуц А.К., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. Математические методы в социологии. М. : Издательство ЛКИ, 2014. 214 с.
2. Kock A. Synthetic Differential Geometry. Cambridge University Press, 1981.
3. Гуц А.К. Физика реальности. Омск : Изд-во КАН, 2012. 424 с.
4. Moerdijk I., Reyes G.E. Models for Smooth Infinitesimal Analysis. Springer-Verlag, 1991.

SOCIAL SYSTEM DYNAMICS AND INTUITIONISTIC LOGIC

A.K. Guts
Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: aguts@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. Using population dynamics as an example, it is shown that intuitionistic differential equations allow us to describe the social reality more fully.

Keywords: social systems, intuitionistic logic, smooth toposes, population, equilibrium state.