

## КОНКУРЕНЦИЯ ДЕРЕВЬЕВ ЛЕСНОГО ФИТОЦЕНОЗА КАК СИСТЕМА ОТНОШЕНИЙ КУЛАКОВА-ВЛАДИМИРОВА

**А.К. Гуц**

профессор, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой кибернетики ОмГУ, e-mail: aguts@mail.ru

**Л.А. Володченкова**

доцент, к.б.н., e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

**Аннотация.** Показано, что многие индексы конкуренции деревьев в лесном фитоценозе можно вывести в рамках теории бинарных комплексных отношений Кулакова-Владимирова.

**Ключевые слова:** индексы конкуренции деревьев, бинарные комплексные системы отношений Кулакова-Владимирова.

### Введение

Продемонстрируем возможности теории систем фундаментальных отношений, созданной физиками Ю.И. Кулаковым и Ю.С. Владимировым [1–3], применительно к описанию конкурентных взаимодействий деревьев лесного сообщества.

### 1. Индексы конкуренции деревьев

Конкуренция деревьев является важнейшим типом взаимодействий растений в лесных фитоценозах.

Имеется множество различных способов измерения конкуренции деревьев, называемых индексами конкуренции. Приведём некоторые из них.

*Индекс конкуренции Вайса* [4]

$$\frac{1}{d_i} \sum_j d_j, \quad (1)$$

где  $d_i$  и  $d_j$  — диаметр центрального  $i$  и конкурирующего  $j$  дерева.

*Сумма углов между центральным деревом и конкурентом* [5]

$$\sum_j \alpha_j \quad (j \neq i, d_j > d_i), \quad (2)$$

где  $\alpha_j$  — угол в горизонтальной плоскости из центра ствола центрального дерева, образованный двумя касательными к проекции кроны конкурента.

Сумма углов между центральным деревом и конкурентом [5]

$$\sum_j \lambda_j \quad (j \neq i, h_j > h_i), \quad (3)$$

где  $\lambda_j$  — вертикальный угол между горизонтальными линиями, проведёнными из вершин центрального дерева и его конкурентов,  $h_i$  и  $h_j$  — высота центрального  $i$  и конкурирующего дерева  $j$ .

Световой индекс [6]

$$\sum_j \phi_j, \quad (4)$$

где  $\phi_j$  — угол затенения на данный момент времени.

Сумма отношений объемов крон [7]

$$\frac{1}{CV_i} \sum_j CVa_j, \quad (5)$$

где  $CV_i$  — объем кроны центрального дерева  $i$ ,  $CVa_j$  — объем кроны конкурента  $j$  над точкой пересечения линии угла высоты с осью ствола конкурента ( $a_j$ ).

Сумма отношений размеров, взвешенных расстоянием [8]

$$\frac{1}{d_i} \sum_j \frac{d_j}{(Dist_{ij} + 1)} \quad (j \neq i), \quad (6)$$

где  $Dist_{ij}$  — расстояние между центральным деревом  $i$  и конкурентом  $j$ .

Существуют и другие индексы конкуренция, выражаемые с помощью более сложных формул [9], однако, мы оставим их рассмотрение для другой статьи.

## 2. Конкурентные взаимодействия деревьев как унарная система вещественных фундаментальных отношений

Лесной фитоценоз состоит из деревьев, членов лесного сообщества. Обозначим совокупность деревьев через  $\mathcal{L}$ . На данном этапе исследования лесной экосистемы мы не различаем породы деревьев.

*Конкурентное взаимодействие* — это отношение между деревьями лесного сообщества.

Будем обозначать деревья, элементы множества  $\mathcal{L}$ , малыми латинскими буквами  $i, k, j, \dots$ . Поставим в соответствие конкурентному взаимодействию отображение  $\mu : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $i, k \in \mathcal{L}$ , то значения конкурентного взаимодействия между деревом  $i$  и деревом  $k$  представляется в виде формулы

$$m_{ik} = \mu(i, k).$$

Другими словами, конкурентное взаимодействие между деревьями  $i$  и  $k$  характеризуется вещественным числом  $m_{ik}$ .

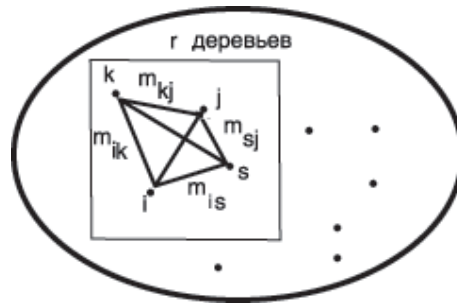


Рис. 1. Унарная система отношений = конкурентное взаимодействие

Будем предполагать, что конкурентное взаимодействие  $\mu$  является *универсальным* в том смысле, что для данного взаимодействия существует натуральное число  $r$  такое, что существует отображение  $\Phi : \mathbb{R}^{\frac{1}{2}r(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающее следующим свойством: для любого произвольного набора из  $r$  деревьев  $i_1, \dots, i_r$  справедливо тождество

$$\Phi \begin{pmatrix} m_{i_1 i_2} & m_{i_1 i_3} & \dots & m_{i_1 i_r} \\ & m_{i_2 i_3} & \dots & m_{i_2 i_r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & m_{i_{r-1} i_r} \end{pmatrix} = 0.$$

Число  $r$  называется *рангом* рассматриваемого типа конкурентного взаимодействия.

В данном определении отчётливо видна постулируемая симметрия данного отношения: любое дерево может быть заменено на любое иное. Но при этом деревья берут в количестве  $r$ . Естественно допустить, что  $r \geq 2$ , т.е. лесное сообщество должно состоять хотя бы из двух деревьев. Как следует из теории унарных систем отношений в действительности  $r \geq 3$ . Другими словами, лес начинается с трёх деревьев.

В работах Ю.И. Кулакова дана классификация унарных вещественных отношений (взаимодействий) ранга  $r$ ,  $3 \leq r \leq 5$ . Однако полученные при этом формулы для  $m_{ik}$  мало похожи на индексы конкуренции.

Тем не менее имеется возможность выйти на эти индексы, используя так называемые бинарные комплексные системы отношений (БКСО) Ю.С. Владимирова, которые представляют перенос идей Ю.И. Кулакова с поля вещественных чисел,  $m_{ik} \in \mathbb{R}$ , в поле комплексных чисел, т.е.  $m_{ik} \in \mathbb{C}$ .

### 3. Вывод формул конкуренции в рамках теории БКСО

*Бинарная комплексная система отношений* (БКСО) ранга  $(r, r)$  сопоставляет двум множествам  $\mathcal{F} = \{i, k, l, \dots\}$  и  $\mathcal{M} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  функции

$$u : \mathcal{F} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$u_{i\alpha} = u(i, \alpha),$$

и

$$\Phi : \mathbb{C}^{r^2} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\Phi \begin{pmatrix} u_{i_1\alpha_1} & u_{i_1\alpha_2} & \dots & u_{i_1\alpha_r} \\ u_{i_2\alpha_1} & u_{i_2\alpha_2} & \dots & u_{i_2\alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{i_r\alpha_1} & u_{i_r\alpha_2} & \dots & u_{i_r\alpha_r} \end{pmatrix} = 0. \quad (7)$$

Предполагается фундаментальная симметрия ранга  $(r, r)$ , по которой в (7) любые  $r$  элементов из множеств  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{M}$  заменяемы.

Для того чтобы вывести формулы (1)–(6), воспользуемся *бинарной комплексной системой отношений* ранга (3,3), которая сводится [3, с. 58-59] к *унарной вещественной системе отношений* ранга 5. Бинарная комплексная система отношений ранга (3,3) задаётся законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} \end{vmatrix} = 0$$

и отношением

$$u_{i\alpha} = x_i^1 y_\alpha^1 + x_i^2 y_\alpha^2,$$

где  $x_i^1, x_i^2, y_\alpha^1, y_\alpha^2$  — комплексные числа. Вводя сшивку множеств  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{F}$  посредством формального сопряжения

$$x_i^1 + i \cdot x_i^2 = \overline{y_\alpha^1 + i \cdot y_\alpha^2}, \quad x_k^1 + i \cdot x_k^2 = \overline{y_\beta^1 + i \cdot y_\beta^2},$$

получаем унарное вещественное отношение ранга 5

$$m_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i\beta} + u_{k\alpha}) = \frac{1}{2}(x_i^1 y_\beta^1 + x_i^2 y_\beta^2 + x_k^1 y_\alpha^1 + x_k^2 y_\alpha^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_i^1 \overline{x_k^1} + x_i^2 \overline{x_k^2} + x_k^1 \overline{x_i^1} + x_k^2 \overline{x_i^2}) = \frac{1}{2}(x_i^1 \overline{x_k^1} + x_i^2 \overline{x_k^2} + \overline{x_i^1 \overline{x_k^1} + x_i^2 \overline{x_k^2}}).$$

Предположим, что центральное дерево — это элемент  $i$ , а остальные деревья — элементы  $k, l, \dots, p$ . Примем, что

$$x_i^1 = x_i^2 = \frac{1}{\sqrt{2M_i}} e^{i\phi} \quad \text{и} \quad \phi = 0,$$

$$x_k^1 = x_k^2 = \frac{K_{ik}}{\sqrt{2M_i}} e^{i\phi_k}, \dots, x_p^1 = x_p^2 = \frac{K_{ip}}{\sqrt{2M_i}} e^{i\phi_p}.$$

Тогда

$$\sum_{j=k, \dots, p} m_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2M_i} \{K_{ik}[e^{i\phi_k} + e^{-i\phi_k}] + \dots + K_{ip}[e^{i\phi_p} + e^{-i\phi_p}]\} = \frac{1}{M_i} \sum_{j=k, \dots, p} K_{ij} \cos \phi_j.$$

Если считать, что деревья  $j$ , которые конкурируют с центральным деревом  $i$ , имеют фазу  $\phi_j = 0$ , то

$$\sum_{j=k, \dots, p} m_{ij} = \frac{1}{M_i} \sum_{j=k, \dots, p} K_{ij}. \quad (8)$$

То есть мы получили общую формулу, под выражение которой подпадают все индексы конкуренции (1)–(5) с  $K_{ij} = K_j$ ;  $K_j = d_j, \alpha_j, \lambda_j, \phi_i, CVa_j$  соответственно и соответственно  $M_i = d_i, 1, 1, 1, CV_i$ .

Если же взять  $M_i = d_i, K_{ij} = d_j / (Dist_{ij} + 1)$ , то получим индекс (6).

#### 4. Заключение

В ходе вывода формулы (8) мы делали упрощающие предположения, которые показывают, что формулы, используемые в теории лесных сообществ, являются частными случаями более сложного соотношения.

Вводя, к примеру, различные значения для фаз  $\phi_j$ , можно более полно учитывать разнообразие в конкурентных взаимодействиях деревьев.

Теория, созданная Ю.И. Кулаковым для единого описания законов физики и различных геометрий, оказалась способной описывать социальные и экономические системы [10, 11]. Поэтому не удивительно, что она проявила себя и при описании лесных экосистем. Структуры Кулакова говорят не о том, каким образом осуществляется взаимодействие, через что идёт взаимодействие и какая материя в этом задействована, а по *какому образцу, паттерну из некоторого фиксированного множества допустимых образцов это осуществляется.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск : НГУ, 1968.
2. Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М. : Архимед, 1992.
3. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. М. : МГУ, 1996.
4. Вайс А.А. Классификация деревьев и горизонтальная структура ценозов // Научный журнал КубГАУ. 2007. № 31(7). С. 1–13.
5. Pukkala T., Kolstrom T. Competition indices and the prediction of radial growth in Scots pine // Silva Fennica. 1987. V. 21. № 1. P. 55–67.
6. Кузьмичев В.В., Миндеева Т.Н., Черкашин В.П. Оценка взаимодействия деревьев в лесных фитоценозах // Известия Сибирского отделения АН СССР, серия биологических наук. 1989. № 3. С. 133–139.
7. Biging G.S., Dobbertin M. A comparison of distance-dependent competition measures for height and basal area growth of individual conifer trees // Forest Science. 1992. V. 38. P. 695–720.

8. Hegyi F. A simulation model for managing jack pine stands // Growth models for tree and stand simulation (J. Fries, ed.). Royal College of Forestry, Stockholm, Sweden. 1974. Res. Note № 30. P. 74–90.
9. Касаткин А.С. Семышев М.М. Индексы конкуренции в лесных насаждениях // Актуальные проблемы лесного комплекса. 2008. № 21. С. 88–90.
10. Гуц А.К., Лаптев А.А. и др. Математические модели социальных систем: учебное пособие. Омск : ОмГУ, 2000. 256 с.
11. Гуц А.К., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. Математические методы в социологии. М. : УРСС, 2014. 214 с.

**TREES COMPETITION OF FOREST PHYTOCENOSIS  
AS THE KULAKOV-VLADIMIROV'S SYSTEM OF RELATIONS**

**A.K. Guts**

Dr.Sc.(Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru

**L.A. Volodchenkova**

Ph.D.(Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

Omsk State University n.a. F.M. Dostoevskiy

**Abstract.** It has been shown that many indexes of trees competition in forest phytocenosis can be derived from the Kulakov-Vladimirov's theory of systems of relations.

**Keywords:** indexes of trees competition, Kulakov-Vladimirov's theory of systems of relations.