А. К. Гуц, Хроногеометрия многообразий Геделя и де Ситтера,
Сиб. матем. журн., 1980, том 21, номер 4, 38–44

https://www.mathnet.ru/smj3749

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXI, № 4 ИЮЛЬ — АВГУСТ 1980

УДК 513.813 : 531.18

А. К. ГУЦ

ХРОНОГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ГЕДЕЛЯ И ДЕ СИТТЕРА

Мы рассматриваем четырехмерное элементарное, т. е. диффеоморфное евклидову пространству R^4, лоренцево многообразие V^4. Следовательно, на V^4 можно ввести глобальные координаты x^0, x^1, x^2, x^3, в которых лоренцева метрика g задается дифференциальной формой

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3)\, dx^i dx^k.$$

Под изотронным конусом $\widetilde{C}_{x_0}$ в точке $x_0 \in V^4$ понимается конус, лежащий в касательном пространстве $V^4_{x_0}$ к V^4 в точке x_0, каждый вектор ξ которого удовлетворяет уравнению

$$g_{x_0}(\xi, \xi) = 0,$$

или в координатах:

$$\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\left(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3\right) \xi^i \xi^k = 0.$$

где $x_0 = \left(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)$.

Конусу $\widetilde{C}_{x_0}$ сопоставим подмножество C_{x_0} многообразия V^4 следующим образом: точка $x \in C_{x_0}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\left(x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)\left(x^i - x_0^i\right)\left(x^k - x_0^k\right) = 0.$$

Если x^0, x^1, x^2, x^3 рассматривать как аффинные координаты, то C_x — конус в V^4. Пусть $f: V^4 \longrightarrow V^4$ — произвольное дифференцируемое отображение. Мы говорим, что f сохраняет семейство $\{C_x : x \in V^4\}$, если выполняется условие

$$f(C_x) = C_{f(x)}. \tag{1}$$

Нетрудно проверить, что в этом случае дифференциал df отображения f сохраняет изотропные конусы $\widetilde{C}_x$, т. е.

$$(df)_x(\widetilde{C}_x) = \widetilde{C}_{f(x)}. \tag{2}$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Но если f в координатах x^0, x^1, x^2, x^3 задается аффинным преобразованием (аффиннизируемо), то равенство (2) влечет равенство (1).

Легко убедиться, что справедлива

Лемма. *Если G_r — r-параметрическая группа движений многообразия (V^4, g), аффинно представимая в координатах x^0, x^1, x^2, x^3 (т. е.*

каждое движение $\varphi \in G_r$ *аффиннизируемо), то равенства* (1) *и* (2) *эквивалентны для любого движения* $\varphi \in G_r$.

Стандартная задача хроногеометрии состоит в определении отображения $f: V^4 \longrightarrow V^4$, удовлетворяющего условию вида (1). Причем не предполагается дифференцируемость f, а часто отказываются и от требования непрерывности. Знание группы движения лоренцева многообразия позволяет установить его геометрию. Интересно решить и обратную задачу: определить группу движений, заранее не предполагая дифференцируемости ее преобразований (обычный путь, ведущий к понятию вектора Киллинга) и имея дело только с изотропными конусами, а точнее, с «конусами» C_x, т. е. спрашивается: можно ли восстановить группу движений G_r многообразия V^4, предполагая, что каждое преобразование $\varphi \in G_r$ удовлетворяет условию (1).

Лемма показывает. что такой подход оправдывается, по крайней мере, для групп движений, допускающих аффинное представление. Например, таковы разрешимые группы движений G_3, действующие транзитивно на V^3 (см. [1], с. 263).

Определение. Пусть группа движений G_r аффиннизируема в координатах $\{x^i\}$. В этом случае под отображением, сохраняющим изотропные конусы, будем понимать биекцию $f: V^4 \longrightarrow V^4$, удовлетворяющую усвию (1). Имеет место

Теорема А (А. Д. Александров, В. В. Овчинникова [2]).

Любое отображение, сохраняющее изотропные конусы в мире Минковского:

$$ds^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2},$$

является суперпозицией неоднородного преобразования Лоренца, т. е. движения, и подобия.

Сформулируем основные результаты статьи.

Теорема 1. *Любое гомеоморфное отображение вселенной Гёделя* [3, 4]:

$$ds^2 = a^2\left(dx^{0^2} - dx^{1^2} - \frac{1}{2}e^{2x^1}dx^{2^2} - dx^{3^2} + 2e^{x^1}dx^0dx^2\right),$$

где $a = \text{const} \neq 0$, *сохраняющее изотропные конусы, является движением.*

Группа движений многообразия Гёделя имеет тип $G_4\mathrm{VI}_1$ по классификации, приведенной у А. З. Петрова [1], и, представляется аффинными преобразованиями вида

$$\bar{x}_0 = x^0 + \alpha;\quad \bar{x}^1 = x_1 + \beta;\quad \bar{x}^2 = x^2e^{-\beta} + \gamma;\quad \bar{x}^3 = x^3 + \delta, \tag{3}$$

где α, β, γ, δ — параметры. Причем эта группа действует просто транзитивно на V^4.

Теорема 2. *Любое гомеоморфное отображение вселенной де Ситтера* [3]:

$$ds^2 = dx^{0^2} - e^{kx^0}\left(dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}\right),$$

где $k = \text{const}$, *сохраняющее изотропные конусы, является движением* [5].

Группа движений вселенной де Ситтера G_7 в координатах $\{x^i\}$ не представляется подгруппой группы аффинных преобразований.

В координатах

$$y^0 = \exp(-kx^0),\quad y^\alpha = kx^\alpha\quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3) \tag{4}$$

метрика вселенной де Ситтера принимает следующую форму:

$$ds^2 = \left(\frac{1}{ky^0}\right)^2\left(dy^{0^2} - dy^{1^2} - dy^{2^2} - dy^{3^2}\right), \tag{5}$$

а группа G_7 состоит из преобразований вида

$$f(y)=\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\ldots 0\\ 0 & \\ \vdots & \boxed{U} \\ 0 & \end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}0\\ \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix},\qquad \lambda>0,$$

где U — ортогональная матрица, т. е. G_7 аффиннизируется в координатах $\{y^i\}$.

Группа G_7 содержит просто транзитивную подгруппу $G_4\mathrm{VI}_1$, которая аффиннизируется в координатах (4). Поэтому конусы C_x во вселенных Гёделя и де Ситтера получаются «разносом» конуса C_{x_0}, где x_0 — фиксированная точка, с помощью некоммутативной группы $G_4\mathrm{VI}_1$, в отличие от мира Минковского, где «разнос» осуществляется с помощью коммутативной группы сдвигов.

Геометрия мира Минковского плоская, вселенная де Ситтера имеет постоянную кривизну, а вселенная Гёделя существенно искривленная.

С точки зрения теории относительности теоремы А, 1 и 2 говорят о том, что геометрию Минковского, Гёделя и де Ситтера можно определить, зная лишь законы распространения света.

Пусть

$$K_x^+=\left\{u\in V^4: u^0>0,\quad \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}(x)\left(u^i-x^i\right)\left(u^k-x^k\right)>0\right\}\cup\{x\},$$

$$K_x^-=\left\{u\in V^4: u^0<0,\quad \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}(x)\left(u^i-x^i\right)\left(u^k-x^k\right)>0\right\}\cup\{x\}.$$

Тогда справедлива

Теорема 3. *Множества вида* $K_x^+\cap K_y^-$, где $x\in K_y^-$ *и* x, y — *произвольные точки, образуют базу топологии вселенных Гёделя и де Ситтера.*

Доказательство теоремы 3 по существу не отличается от доказательства аналогичного результата для мира Минковского ([6]). Причем в случае вселенной де Ситтера надо перейти к координатам (4).

Семейство множеств $\{K_x^+: x\in V^4\}$ в случае вселенной де Ситтера задает порядок в смысле статьи ([7]). В ([7]) показано, что любое отображение, сохраняющее этот порядок, будет движением. Аналогичного порядка во вселенной Гёделя не существует.

1. Доказательство теоремы 1.

Итак, конус C_z задается уравнением

$$\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}(z)\left(x^i-z^i\right)\left(x^k-z^k\right)=0$$

или

$$\left(x^0-z^0\right)^2-(x^1-z^1)^2-\frac{1}{2}e^{2z^1}(x^2-z^2)^2-(x^3-z^3)^2+$$
$$+2e^{z^1}(x^0-z^0)(x^2-z^2)=0, \tag{6}$$

где (z^0, z^1, z^2, z^3) — координаты точки z.

Далее мы отождествляем V^4 с R^4. Обозначим через $H^2(a)$ гиперплоскость в R^4, определяемую уравнением $x^2=a=\mathrm{const}$. В каждой гиперплоскости $H^2\left(z_0^2\right)$ имеем семейство конусов:

$$S\left(z^0, z^1, z^3\right)=\left\{\left(x^0, x^1, z_0^2, x^3\right)\in R^4: \left(x^0-z^0\right)^2-\left(x^1-z^1\right)^2-\left(x^3-z^3\right)^2=0\right\},$$

где $z \in H^2(z_0^2)$. Мы можем выбрать на конусе $S(z_0^0, z_0^1, z_0^3)$, $z_0 \in H^2(z_0^2)$, четыре прямых в общем положении (т. е. никакие три не лежат в одной двумерной плоскости) $l_{z_0}^A$ $(A = 1, 2, 3, 4)$. Пусть $z \in H^2(z_0^2)$ и t — сдвиг такой, что $t(z_0) = z$. Положим $l_z^A = t\left(l_{z_0}^A\right)$ $(A = 1, 2, 3, 4)$. Имеем в $H^2(z_0^2)$ четыре семейства параллельных прямых $\{l_z^A\}$ $(A = 1, 2, 3, 4)$. В силу равенства (1) и

$$S(u^0, u^1, u^3) \cap S(z^0, z^1, z^3) = l_u^A = l_z^A = C_u \cap C_z, \quad z \in l_u^A,$$

мы убеждаемся, что $f(l_z^A)$ является прямой в R^4. Далее, легко проверить, что параллельные прямые l_z^A и l_u^A $(z \neq u)$ отображаются на параллельные прямые и двумерная плоскость, натянутая на каждую пару прямых $\{l_z^A, l_z^B\}$, $A \neq B$, отображается на двумерную плоскость. Отсюда следует, что прямые $f(l_z^A)$ $(A = 1, 2, 3, 4)$ находятся в общем положении и $f(H^2(z_0^2))$ является гиперплоскостью (см. [2]).

Пусть
$$D_z = \bigcup_{A=1}^{4} l_z^A, \quad D'_{f(z)} = \bigcup_{A=1}^{4} f(l_z^A).$$

Тогда
$$f(D_z) = D'_{f(z)}$$

и, следовательно, f аффинно на $H^2(z_0^2)$ в силу теоремы 1 из [8].

Рассмотрим теперь двумерную плоскость

$$P(ab) = \{x \in R^4 : x^1 = a,\ x^3 = b\},$$

где a, b произвольные константы. На плоскости $P(z_0^1 z_0^3)$ имеем семейство 1-конусов:

$$F(z^0, z^2) = \Big\{(x^0, z_0^1, x^2, z_0^3) \in R^4 : (x^0 - z^0)^2 - \frac{1}{2} e^{2z^1} (x^2 - z^2)^2 + {} + 2e^{z^1} (x^0 - z^0)(x^2 - z^2) = 0\Big\}, \quad z \in P(z_0^1 z_0^3).$$

Эта пара пересекающихся в точке (z^0, z_0^1, z^2, z_0^3) прямых, лежащих в $P(z_0^1 z_0^3)$. Обозначим эти прямые через l_z^5, l_z^6, где $z = (z^0, z_0^1, z^2, z_0^3) \in P(z_0^1 z_0^3)$. Получаем в плоскости $P(z_0^1 z_0^3)$ два семейства параллельных прямых. Так как $l_z^B = l_u^B = F(z^0, z^2) \cap F(u^0, u^2) \subset C_u \cap C_z$, $z \in l_u^B$ $(B = 5,6)$, то $f(l_z^B)$ $(B = 5, 6)$ есть прямая. Следовательно, $f\left[P(z_0^1 z_0^3)\right]$ — двумерная плоскость. Плоскость $P(z_0^1 z_0^3)$ пересекает гиперплоскость $H^2(a)$ по прямой $l^7_{(z_0^0, z_0^1, a, z_0^3)}$. Поскольку для любого a образ $f(H^2(a))$ есть, очевидно, гиперплоскость, причем $f(H^2(a))$ параллельна $f(H^2(a'))$ $(a \neq a')$, то на плоскости $P(z_0^1 z_0^3)$ получаем третье семейство параллельных прямых $\{l_z^7 : z \in P(z_0^1 z_0^3)\}$. Итак, f отображает $P(z_0^1 z_0^3)$ на плоскость, а три семейства параллельных прямых $\{l_z^A : z \in P(z_0^1 z_0^3)\}$ $(A = 5, 6, 7)$ — на аналогичное семейство. Значит, f аффинно на $P(z_0^1 z_0^3)$ [8].

Пусть $z_0 \in R^4$ и $L_{z_0}^A$ $(A = 1, 2, 3, 4)$ — различные прямые, такие, что $L_{z_0}^B \subset H^2(z_0^2)$ $(B = 1, 2, 3)$, $L_{z_0}^3$, $L_{z_0}^4 \subset P(z_0^1 z_0^3)$. Существует аффинное преобразование g: R^4 на R^4, обладающее следующими свойствами:

$$g(f(z_0)) = z_0, \quad g\left(f\left(L_{z_0}^A\right)\right) = L_{z_0}^A \quad (A = 1, 2, 3, 4).$$

Тогда отображение $g \circ f$ отображает $H^2(z_0^2)$ аффинно на $H^2(z_0^2)$ и $P(z_0^1 z_0^3)$ аффинно на $P(z_0^1 z_0^3)$ и $(g \circ f)\left(L_{z_0}^A\right) = L_{z_0}^A$ $(A = 1, 2, 3, 4)$. Выбирая прямые $L_{z_0}^A$ $(A = 1, 2, 3, 4)$ в качестве новых осей координат, убеждаемся, что в этих координатах $g \circ f$ задается аффинным преобразованием. Следовательно, f — аффинно отображает R^4 на R^4, т. е.

$$f^i(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k^i x^k + a^i \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{7}$$

Поскольку выполняется равенство

$$f(C_z) = C_{f(z)},$$

то должны иметь наравне с (6):

$$[f^0(x) - f^0(z)]^2 - [f^1(x) - f^1(z)]^2 - \frac{1}{2} e^{2f^1(z)} [f^2(x) - f^2(z)]^2 - [f^3(x) - f^3(z)]^2 + \\ + 2e^{f^1(z)} \left[f^0(x) - f^0(z)\right] \left[f^2(x) - f^2(z)\right] = 0. \tag{8}$$

Из (7), (8) получаем

$$\Bigg[(a_0^0)^2 - (a_0^1)^2 - \frac{(a_0^2)^2}{2} \exp\left(2\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + 2a^1\right) - (a_0^3)^2 + \\ + 2a_0^0 a_0^2 \exp\left(\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + a^1\right)\Bigg] (x^0 - z^0)^2 - \\ - \Bigg[-(a_1^0)^2 + (a_1^1)^2 + \frac{(a_1^2)^2}{2} \exp\left(2\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + 2a^1\right) + (a_1^3)^2 - \\ - 2a_1^0 a_1^2 \exp\left(\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + a^1\right)\Bigg] (x^1 - z^1)^2 - \\ - \Bigg[-(a_2^0)^2 + (a_2^1)^2 + \frac{(a_2^2)^2}{2} \exp\left(2\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + 2a^1\right) + (a_2^3)^2 - \\ - 2a_2^0 a_2^2 \exp\left(\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + a^1\right)\Bigg] (x^2 - z^2)^2 - \\ - \Bigg[-(a_3^0)^2 + (a_3^1)^2 + \frac{(a_3^2)^2}{2} \exp\left(2\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + 2a^1\right) + (a_3^3)^2 - \\ - 2a_3^0 a_3^2 \exp\left(\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + a^1\right)\Bigg] (x^3 - z^3)^2 + \\ + \Bigg[2a_0^0 a_2^0 - 2a_0^1 a_2^1 - a_0^2 a_2^2 \exp\left(2\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + 2a^1\right) - 2a_0^3 a_2^3 + \\ + 2\left(a_0^0 a_2^2 + a_2^0 a_0^2\right) \exp\left(\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + a^1\right)\Bigg] (x^0 - z^0)(x^2 - z^2) + \\ + \Bigg[2a_0^0 a_1^0 - 2a_0^1 a_1^1 - a_0^2 a_1^2 \exp\left(2\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + 2a^1\right) - 2a_0^3 a_1^3 + \\ + 2\left(a_0^0 a_1^2 + a_1^0 a_0^2\right) \exp\left(\sum_{k=0}^{3} a_k^1 z^k + a^1\right)\Bigg] (x^0 - z^0)(x^1 - z^1) +$$

$$+\left[2a_0^0a_3^0 - 2a_0^1a_3^1 - a_0^2a_3^2\exp\left(2\sum_{k=0}^{3}a_k^1z^k + 2a^1\right) - 2a_0^3a_3^3 +\right.$$

$$\left.+ 2\left(a_0^0a_3^2 + a_3^0a_0^2\right)\exp\left(\sum_{k=0}^{3}a_k^1z^k + a^1\right)\right]\left(x^0 - z^0\right)\left(x^3 - z^3\right) +$$

$$+\left[2a_1^0a_2^0 - 2a_1^1a_2^1 - a_1^2a_2^2\exp\left(2\sum_{k=0}^{3}a_k^1z^k + 2a^1\right) - 2a_1^3a_2^3 +\right.$$

$$\left.+ 2\left(a_1^0a_2^2 + a_3^0a_1^2\right)\exp\left(\sum_{k=0}^{3}a_k^1z^k + a^1\right)\right]\left(x^1 - z^1\right)\left(x^2 - z^2\right) +$$

$$+\left[2a_1^0a_3^0 - 2a_1^1a_3^1 - a_1^2a_3^2\exp\left(2\sum_{k=0}^{3}a_k^1z^k + 2a^1\right) - 2a_1^3a_3^3 +\right.$$

$$\left.+ 2\left(a_1^0a_3^2 + a_3^0a_1^2\right)\exp\left(\sum_{k=0}^{3}a_k^1z^k + a^1\right)\right]\left(x^1 - z^1\right)\left(x^3 - z^3\right) +$$

$$+\left[2a_2^0a_3^0 - 2a_2^1a_3^1 - a_2^2a_3^2\exp\left(2\sum_{k=0}^{3}a_k^1z^k + 2a^1\right) - 2a_2^3a_3^3 +\right.$$

$$\left.+ 2\left(a_2^0a_3^2 + a_3^0a_2^2\right)\exp\left(\sum_{k=0}^{3}a_k^1z^k + a^1\right)\right]\left(x^2 - z^2\right)\left(x^3 - z^3\right) = 0 \qquad (9)$$

Сравнивая (9) и (6), получаем [1)]

$$a_0^1 = a_2^1 = a_3^1 = 0, \quad a_0^2 = a_1^2 = a_2^0 = a_3^2 = 0,$$

$$a_3^0 = a_1^0 = a_2^3a_3^3 = a_1^3a_3^3 = a_1^3a_2^3 = a_0^3a_3^3 = 0, \qquad (10)$$

$$\left(a_0^0\right)^2 - \left(a_0^3\right)^2 = 1, \quad \left(a_1^1\right)^2 + \left(a_1^3\right)^2 = 1, \quad \left(a_3^3\right)^2 = 1. \qquad (11)$$

Из (10) и (11) получаем

$$a_1^3 = a_2^3 = a_0^3 = 0.$$

Следовательно,

$$\left(a_0^0\right)^2 = \left(a_1^1\right)^2 = \left(a_3^3\right)^2 = 1,$$

$$\left(a_2^2\right)^2\exp 2a^1 = 1,$$

$$a_0^0a_2^2\exp a^1 = 1.$$

Нетрудно видеть, что $a_1^1 = 1$.
Оставляя в стороне отражения: $x^A \to -x^A$ $(A = 0, 2, 3)$, получаем

$$a_0^0 = a_1^1 = a_3^3 = 1, \; a_2^2 = e^{-a^1},$$

т. е. получили преобразование вида (3). Значит, f — движение
Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2.

В координатах (4) метрика вселенной де Ситтера записывается в виде (5). Следовательно, V^4 отождествляется с полупространством $\{y \in R^4 : y^\circ > 0\}$, а конусы C_z задаются уравнением

$$(y^0 - z^0)^2 - (y^1 - z^1)^2 - (y^2 - z^2)^2 - (y^3 - z^3)^2 = 0.$$

---

[1] Конформные преобразования вида (7) все тривиальны, т. е. сводятся к движениям.

В работе ([9], теорема 2) показано, что в этом случае отображение, сохраняющее изотропные конусы, можно записать в виде:

$$f(y)=\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{U} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}0\\ \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix},$$

где U — ортогональная матрица, $\lambda>0$, α, β, γ — параметры.

Все эти преобразования образуют 7-параметрическую группу G_7, которая, как легко видеть, есть группа движений вселенной де Ситтера.

Теорема 2 доказана.

Омск,
Омский государственный университет

Статья поступила
10 декабря 1978 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Петров А. З.* Пространства Эйнштейна. М. ФМ. 1961.
[2] *Александров А. Д., Овчинникова В. В.* Замечания к основам теории относительности.— Вестник Ленинград. ун-та, 1953, вып. 11, с. 95—100.
[3] *Синг Дж.* Общая теория относительности. М., ИЛ., 1963.
[4] *Gödel K.* An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Fields Equations of Gravitation.— Rev. of Mod. Phys., 1949, v. 21, № 3, p. 447.
[5] *Гуц А. К.* Об отображениях семейств множеств.— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 4, с. 773—774.
[6] *Cezar Gheorghe, Eleonora Mihul.* Causal Group of Space — Time.— Comm. math. Phys., 1969, v. 14, № 2, p. 165—170.
[7] *Гуц А. К.* Отображения упорядоченного пространства Лобачевского.— Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 1, с. 35—37.
[8] *Гуц А. К.* Об отображениях семейств множеств в гильбертовом пространстве.— Известия ВУЗов. Матем. 1975, № 3, с. 23—29.
[9] *Гуц А. К.* Об отображениях, сохраняющих конусы в пространстве Лобачевского.— Математич. заметки, 1973, т. 13, № 5, с. 687—694.