А. К. Гуц, Изотонные отображения несвязно упорядоченного евклидова пространства,
Сиб. матем. журн., 1980, том 21, номер 3, 80–88

https://www.mathnet.ru/smj3728

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXI МАЙ — ИЮНЬ 1980

УДК 513.82

А. К. ГУЦ

ИЗОТОННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НЕСВЯЗНО УПОРЯДОЧЕННОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Мы рассматриваем n-мерное евклидово пространство E^n $(n \geqslant 2)$, в котором задан инвариантный относительно параллельных переносов несвязный порядок.

1. Геометрически введение порядка в E^n состоит в том, что каждой точке $x \in E^n$ сопоставляется множество $P_x \subset E^n$ с условиями: (a) $x \in P_x$; (b) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$; (c) при $x \neq y$ имеем $P_x \neq P_y$. Тогда, записывая отношение $y \in P_x$ как $x \leqslant y$, получаем частичный порядок в E^n.

Инвариантность порядка относительно параллельных переносов понимается следующим образом: если t — параллельный перенос (сдвиг) и $t(P_x)$ обозначает образ множества P_x при переносе t, то для любой точки $x \in E^n$ и любого сдвига t имеет место равенство: $t(P_x) = P_{t(x)}$.

Таким образом, задание инвариантного порядка определяется заданием некоторого фиксированного множества P_e.

Мы фиксируем точку e на протяжении всей статьи и будем писать P вместо P_e.

Далее, $P^- \equiv \{x \in E^n : x \leqslant e\}$.

Если множество P несвязное, то порядок называется несвязным. Связность порядка означает связность множества P. Соответственно пространство, в котором задан несвязный или связный порядок, будем называть несвязно или связно-упорядоченным.

Задача, которой посвящена эта статья, состоит в изучении взаимно-однозначных отображений E^n на себя, сохраняющих заданный в E^n несвязный инвариантный порядок. Под сохранением порядка понимаем следующее свойство отображения $f: E^n \to E^n$: для любой точки $x \in E^n$ имеет место равенство: $f(P_x) = P_{f(x)}$, где P — рассматриваемый порядок.

Отображения, обладающие этим свойством, будем называть *P-изотонными* или просто изотонными (если понятно по отношению к какому порядку).

2. Несвязный порядок P, изучаемый нами, удовлетворяет следующим условиям:

А) $P = \{e\} \cup Q$, где Q — замкнутое связное множество с внутренними точками, не содержащее точку e;

Б) P лежит внутри некоторого выпуклого конуса с острой вершиной e («острая вершина» — значит конус не содержит никакой прямой).

В) Существуют n лучей $L_1, L_2, \ldots, L_n$, не лежащие в одной гиперплоскости и исходящие из точки e, такие, что для любой $x \in Q$

$$t\left(\bigcup_{i=1}^{n} L_i\right) \subset Q,$$

где t — сдвиг, обладающий свойством: $t(e) = x$.

Основным полученным нами результатом является

Теорема А. *Любое изотонное взаимно-однозначное отображение евклидова пространства E^n $(n \geqslant 2)$ на себя является аффинным преобразованием, за исключением особого случая, когда порядок задан квазицилиндром* (см. § 4). Однако и в этом случае дается полное описание отображения.

Конечно, предполагается, что порядок удовлетворяет условиям А), Б) и В). Если ограничиваться только непрерывными изотонными отображениями, то требование замкнутости и связности Q не обязательно.

3. Всюду в статье изотонные отображения предполагаются гомеоморфизмами E^n на себя, поскольку имеет место следующая принадлежащая А. Д. Александрову

Теорема А′. *Если порядок удовлетворяет условиям* А) *и* Б), *то всякое изотонное взаимно-однозначное отображение E^n на себя является гомеоморфизмом.*

В таком виде теорема не опубликована, однако, по существу ее доказательство есть повторение доказательства теоремы 4 из [1]. Вместо рассматриваемых в [1] ограниченных множеств достаточно рассматривать всевозможные непустые интервалы $P_a \cap P_b^-$.

4. На языке теории коммутативных топологических групп теорема А утверждает об изоморфности изотонных отображений (см. [2]). Изотонные гомеоморфизмы связно упорядоченного аффинного пространства (коммутативной группы) изучались А. Д. Александровым [2]. Пример связно упорядоченной некоммутативной группы Ли, для которой верна теорема, подобная теореме А, дан в [3].

5. Теорема А с точки зрения теории относительности означает, что группа Лоренца может быть получена как следствие такого принципа причинности, который не предполагает причинно-следственного взаимодействия событий микромира.

Впервые эти вопросы затрагивались в [4–6].

§ 1. Обозначения

Основная терминология и обозначения были даны во введении.

На протяжении всей статьи P обозначает порядок, который удовлетворяет условиям А) и Б).

(1.1) Точки пространства E^n обозначаем малыми латинскими буквами. Если A — множество, то через $\mathring{A}$, $\bar{A}$, ∂A обозначаем соответственно его внутренность, замыкание и границу.

Пусть M — множество в E^n. Через M_x будем обозначать множество, полученное из M с помощью сдвига t такого, что $t(e) = x$. Полагаем также $M = M_e$.

Если $x, y \in E^n$, то $[x, y]$ обозначает отрезок прямой с концами x и y, а $(x, y) = [x, y] \setminus \{x, y\}$. Наконец, $|x - y|$ есть евклидово расстояние между x и y.

Далее $l(x, y)$ и $l^+(x, y)$ будут обозначать соответственно прямую, проходящую через x, y, и луч, исходящий из точки x и проходящий через $y (x \neq y)$.

Если $x \in E^n$, а $r > 0$ — некоторое число, то через $B(x, r)$ обозначаем открытый шар с центром x и радиусом r.

(1.2) Так как нас интересуют лишь гомеоморфизмы, то можно считать, что $Q = \overline{(\mathring{Q})}$, ибо это не отразится на теореме А. Очевидно, если P — порядок, то и $P' = \{e\} \cup \overline{(\mathring{Q})}$ — порядок.

(1.3) Точки на луче $l^+(x, y)$, где $x \neq y$ упорядочиваем естественным образом: считаем $v \geqslant w$, если $v, w \in l^+(x, y)$ и $|x-v| \geqslant |x-w|$.

(1.4) Отметим, что метрика нам нужна лишь для простоты изложения; так что вместо E^n можно рассматривать аффинное пространство.

§ 2. Внешний конус

(2.1) Определение 1. Положим

$$C = \overline{\bigcup_{x \in \mathring{Q}} l^+(e, x)},$$

где Q — связная часть порядка P.

Конус C будем называть внешним конусом порядка P. Его вершиной является точка e.

(2.2) Если x_0 — внутренняя точка множества Q, то существует луч $l^+(v, y) \subset l^+(e, x_0)$, целиком лежащий в $\mathring{Q}$. Более того, для некоторого $\varepsilon > 0$ конус

$$\bigcup_{w \in \overline{B(y,\varepsilon)}} l^+(v, w)$$

лежит целиком в $\mathring{Q}$ $(0 < \varepsilon < |v-y|)$.

Это следует из условия А) и из того, что P есть порядок, ибо если $x_0 \in \mathring{Q}$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $B(x_0, \delta) \subset \mathring{Q}$. Однако поскольку $P_x \subset P$, $x \in B(x_0, \delta)$, то, обозначив через t сдвиг, переводящий e в x_0, получим $B(t(x_0), 2\delta) \subset \mathring{Q}$. Так как $P_{t(x)} \subset P$ для $x \in B(x_0, \delta)$, то отсюда следует, что $B(t(t(x_0)), 3\delta) \subset \mathring{Q}$ и т. д. Найдется натуральное число m такое, что

$$B(\underbrace{t(\ldots t}_{m}(x_0)\ldots), (m+1)\delta) \cap B(\underbrace{t(\ldots t}_{m-1}(x_0)\ldots), m\delta) \neq \varnothing.$$

Понятно, что повторение описанной процедуры будет давать шар, который имеет с предыдущим непустое пересечение. Искомая точка v равна $\underbrace{t(\ldots t}_{m}(x_0)\ldots)$. Остальная часть утверждения очевидна.

(2.3) Лемма 1 $P \subset C$.

Доказательство. (a) Если $x \in Q$ и x является пределом последовательности $\{x_n\}$, где $x_n \in \mathring{Q}$, то последовательность лучей $\{l^+(e, x_n)\}$ сходится к лучу $l^+(e, \tilde{x})$. Ясно, $x \in l^+(e, \tilde{x})$ и $l^+(e, \tilde{x}) \subset C$, т. е. $x \in C$. (b) Пусть $x \in Q$, но ситуация, описанная в пункте (a), не имеет места. Предположим, что $x \notin C$. Поскольку $P_x \subset P$, то существует последовательность точек $\{x_m\}$, $x_m \in Q \setminus \mathring{Q}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ такая, что $|x_m - x_{m+1}| = |x-e|$ и $x_1 = x$. В самом деле, если t — сдвиг, переводящий e в x, то $x_m = \underbrace{t(\ldots t}_{m}(x)\ldots)$. Ясно, $\{x_m\} \not\subset C$. Так как множество C замкнутое, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что конус

$$K_\varepsilon = \bigcup_{v \in B(x,\varepsilon)} l^+(e, v)$$

не имеет общих точек с конусом C, кроме точки e. Пусть $z \in \mathring{Q}$ — такая точка, что $\lambda \equiv l^+(e, z) \setminus [e, z) \subset \mathring{Q}$. Положим $\rho = |e-z|$. Найдется число $m_0 > 0$, для которого $B(x_{m_0}, 2\rho) \subset K_\varepsilon$. Значит, $t(\lambda) \cap B(x_{m_0}, 2\rho) \neq \varnothing$, где t — сдвиг, переводящий e в x_{m_0}, т. е. существует точка $y \in t(\lambda)$ такая, что $y \in \overset{\circ}{Q}_{x_{m_0}} \cap K_\varepsilon$. Но $K_\varepsilon \cap \overset{\circ}{Q} = \varnothing$ и, значит, $K_\varepsilon \cap \overset{\circ}{Q}_{x_{m_0}} = \varnothing$, что противоречит только что полученному утверждению. Значит, на самом-то деле $x \in C$.

Лемма 1 доказана.

(2.4) Очевидно, имеет место равенство

$$\overline{\bigcup_{x \in Q} l^+(e, x)} = C.$$

(2.5) Лемма 2. *Конус C является выпуклым.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся точки x, $y \in \partial C$ такие, что для любой $v \in (x, y)$ имеем $v \notin C$. Так как $C = \overline{C}$, то существует точка $v_0 \in (x, y)$ и число $\varepsilon > 0$, для которых $B(v_0, \varepsilon) \cap C = \varnothing$. Пусть p', $q' \in \overset{\circ}{Q}$ такие точки, что для точек p, q, лежащих соответственно на лучах $l^+(e, p')$ и $l^+(e, q')$, имеем

$$\lfloor p, q \rfloor \cap B(v_0, \varepsilon) \neq \varnothing. \tag{1}$$

Без ограничения общности можно принять, что $p \neq p'$, $q \neq q'$, $l^+(p, p') \subset l^+(e, p')$, $l^+(q, q') \subset l^+(e, q')$ и $l^+(p, p') \setminus [e, p) \subset \overset{\circ}{Q}$,

$$\lambda \equiv l^+(q, q') \setminus [e, q) \subset \overset{\circ}{Q}. \tag{2}$$

Рассмотрим конус C_p. Луч $[l^+(q, q')]_p$ параллелен лучу $l^+(q, q')$, а значит, пересекается с конусом

$$\bigcup_{w \in B(v_0, \varepsilon)} l^+(e, w). \tag{3}$$

Двигая теперь конус C_p вдоль луча $l^+(p, p')$, мы легко найдем точку $w \in l^+(p, p')$ такую, что луч $t(\lambda)$ (см. (2)), где t сдвиг, переводящий e в w, будет пересекаться с конусом (3). Но $t(\lambda) \subset \overset{\circ}{Q}_w$, а конус (3) лежит вне конуса C. Значит, найдется точка $\widetilde{w} \in t(\lambda)$ такая, что $\widetilde{w} \notin C$. Но $\widetilde{w} \in \overset{\circ}{Q}_w$, и так как $P_w \subset P$, то $\widetilde{w} \in \overset{\circ}{Q}$. Откуда $\widetilde{w} \in C$. Получаем противоречие с тем, что получили выше.

Лемма 2 доказана.

(2.6) В силу условия Б) внешний конус C имеет острую вершину. Собственно говоря, в условии Б) мы как раз имели в виду внешний конус.

(2.7) Из условия Б) следует, что существует гиперплоскость H, проходящая через точку e и для которой имеем

$$H \cap Q = \varnothing, \quad C \cap H = \{e\}.$$

Мы сохраняем обозначение H для такой гиперплоскости на протяжении всей статьи. Пусть также H^+ замкнутое полупространство, порожденное H, содержащее множество P, а $H^- = E^n \setminus \overset{\circ}{H^+}$.

Если H_x пересекается с Q, то множество $H_x \cap Q$ компактное.

§ 3. Линейчатый порядок

(2.3) Определение 2. Порядок P называется *внутренне-линейчатым*, если существует луч $l^+(e, x_0) \subset \overset{\circ}{C} \cup \{e\}$, где $x_0 \in \overset{\circ}{Q}$, такой, что любая прямая l, параллельная лучу $l^+(e, x_0)$ пересекается с множеством Q обязательно по лучу, т. е. если $l \parallel l^+(e, x_0)$, то $l \cap Q$ — луч.

Определение 3. Порядок P называется *гранично-линейчатым*, если он не является внутренне-линейчатым и существует луч $l^+(e, x_0) \subset \partial C$, где $x_0 \in \partial C$ такой, что для любой прямой l, параллельной лучу $l^+(e, x_0)$, множество $l \cap Q$ либо пусто, либо обязательно является лучом (т. е. $l \cap Q$ либо пусто, либо луч).

Порядок P будем называть линейчатым, если он либо внутренне-линейчатый, либо гранично-линейчатый.

В этом параграфе порядок P предполагается обязательно линейчатым.

(3.2) Пусть

$$\widetilde{P} \equiv E^n \setminus \bigcup_{e \in \partial Q_x} \overset{\circ}{Q}_x.$$

Тогда можно рассмотреть семейство $\{\widetilde{P}_x : x \in E^n\}$, которое осуществляет вообще-то переход к связному линейчатому порядку.

Лемма 3. *Если порядок P — линейчатый*[1], *то $\widetilde{P} \subset C^-$, где C^- обозначает конус, центрально-симметричный конусу C, относительно точки e.*

Доказательство. Пусть $x \in \widetilde{P}$. Возможны четыре случая:

1) $x \in \overset{\circ}{C}$;
2) $x \in \partial C \setminus \{e\}$;
3) $x \notin C \cup C^-$;
4) $x \in C^-$.

Четвертый случай сразу же ведет к утверждению леммы. Поэтому последовательно рассмотрим первые три.

Так как $x \in \widetilde{P}$, то для любой точки z такой, что $e \in \partial Q_z$, имеем $x \notin \overset{\circ}{Q}_z$, т. е.

$$x \notin \bigcup_{e \in \partial Q_z} \overset{\circ}{Q}_z \tag{5}$$

1) Итак, $x \in \overset{\circ}{C}$. Пусть $z \in l^+(e, x)$ самая дальняя от e точка, принадлежащая ∂Q. Такая точка найдется, ибо $l^+(e, x) \subset \overset{\circ}{C} \cup \{e\}$. Более того, этот луч проходит обязательно (см. определение 1) через некоторую точку $y \in \overset{\circ}{Q}$. Значит, луч $l^+(z, v) \subset l^+(e, x)$, где $z < v \in l^+(e, x)$ таков, что $l^+(z, v) \setminus \{z\} \subset \overset{\circ}{Q}$. Пусть t — сдвиг, переводящий точку z в e. Тогда $\partial t(Q) \ni e$ и $x \in t(\overset{\circ}{Q})$. Но это противоречит (5).

2) Пусть $x \in \partial C \setminus \{e\}$. Возьмем точку $v \in \overset{\circ}{Q}$. Тогда согласно (2.2) существует круговой конус K с осью L_0 и вершиной $w \in l^+(e, v)$ такой, что $K \subset \overset{\circ}{Q}$. Рассмотрим шары $\overline{B(z, r(z))}$, где $z \in L_0$, вписанные в K. Обозначим через z_0 такую точку, что $r(z_0) > |e - x|$.

Положим $l(e, x) = l^+(e, x) \cup L$, $L \cap l^+(e, x) = \{e\}$. Тогда луч L_{z_0} обязательно пересекается с ∂Q. Пусть $a \in L_{z_0} \cap \partial Q$ такая точка, что на $[z_0, a)$ нет точек из ∂Q. Ясно, что $|z_0 - a| \geqslant r(z_0) > |e - x|$. Поскольку $[z_0, a) \subset \overset{\circ}{Q}$, то, обозначив через t сдвиг, переводящий a в e, получим

$$e \in \partial t(Q), \quad x \in t(\overset{\circ}{Q}).$$

Но это противоречит (5).

3) Пусть $x \notin C \cup C^-$. Воспользуемся конусом K, введенным нами в 2), а также лучом L. Луч L_{z_0} обязательно пересекается с ∂Q, ибо $L_{z_0} \subset H^-_{z_0}$

[1] Лемма справедлива и для нелинейчатого порядка.

(см. (2.7)). Пусть $a \in L_{z_0}$— ближайшая к z_0 точка из ∂Q. Тогда $(a, z_0] \neq \neq \varnothing$ и более того $(a, z_0] \subset \overset{\circ}{Q}$, $|a - z_0| \geqslant r(z_0) > |e - x|$.

Если t — сдвиг такой, что $t(a) = e$, то

$$e \in \partial t(Q) \quad \text{и} \quad x \in t(\overset{\circ}{Q}),$$

а это противоречит (5).

Лемма 3 доказана.

(3.3) В этом пункте мы докажем важную лемму, которой мы воспользуемся в дальнейшем.

Пусть Π — некоторое неограниченное множество, содержащее точку e, лежащее внутри выпуклого замкнутого конуса K с острой вершиной e.

Лемма 4. *Если $f: E^n \to E^n$ — гомеоморфизм, сохраняющий семейство $\{\Pi_x : x \in E^n\}$, т. е. $f(\Pi_x) = \Pi_{f(x)}$ для любой точки $x \in E^n$, то существует множество Π', содержащее точку e и лежащее внутри конуса K, такое, что Π' задает в E^n порядок и более того $f(\Pi'_x) = \Pi'_{f(x)}$, где $x \in E^n$ произвольная точка, т. е. f является Π'-изотонным.*

Доказательство.

Пусть

$$\Pi^{(0)} = \Pi, \quad \Pi^{(1)} = \bigcup_{x \in \Pi} \Pi_x, \ldots, \Pi^{(n)} = \bigcup_{x \in \Pi^{(n-1)}} \Pi_x^{(n-1)}, \ldots$$

$$\Pi' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi^{(n)}.$$

Покажем, что Π' — искомый порядок. Предположим противное, т. е. Π' не задает порядка. Тогда существует точка $x \in \Pi'$ такая, что Π'_x не является подмножеством множества Π'. Следовательно, найдется точка $y \in \Pi'_x$, которая не принадлежит Π'. Отсюда получаем, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ точка $y \notin \Pi^{(n)}$, и в то же время существует m_0 такой, что $y \in \Pi_x^{(m_0)}$. Так как $x \in \Pi'$, то найдется m_1, для которого имеем $x \in \Pi^{(m_1)}$. Значит, $x \in \Pi_x^{(m_1)} \subset \Pi^{(m_1+1)}$. Но, как легко видеть, $\Pi^{(k)} \subset \Pi^{(k+1)}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Поэтому

$$y \in \Pi_x^{(m_0)} \subset \Pi_x^{(\max(m_0, m_1))},$$

$$x \in \Pi_x^{(m_1)} \subset \Pi_x^{(\max(m_0, m_1))} \subset \Pi^{(\max(m_0, m_1)+1)},$$

т. е. $y \in \Pi^{(\max(m_0, m_1)+1)}$. Но это противоречит тому, что $y \notin \Pi^{(n)}$ для любого $n = 0, 1, \ldots$.

Полученное противоречие показывает, что Π' задает порядок в E^n. Так как мы построили Π' из семейства $\{\Pi_x : x \in E^n\}$, использовав лишь теоретико-множественные операции, то, очевидно, f будет сохранять порядок Π'.

Лемма 4 доказана.

Таким образом, с помощью леммы 4 мы можем от данного семейства множеств переходить к такому, которое задает уже порядок в E^n. Причем сохраняется свойство инвариантности семейства по отношению к рассматриваемому гомеоморфизму.

(3.4) Обозначим через $\operatorname{ord}(\Pi)$ множество Π' из леммы 4, полученное из множества Π, удовлетворяющего условиям леммы 4.

Если Π задает порядок, то ясно, что $\operatorname{ord}(\Pi) = \Pi$. Когда же Π не задает порядка, то $\operatorname{ord}(\Pi)$ обязательно его задает.

Нетрудно также заметить, что если Π — линейчатое по отношению к лучу L, линейно-связное множество, то $\mathrm{ord}\,(\Pi)$ будет линейчатым по отношению к лучу L и линейно-связным.

(3.5) Если P — линейчатый порядок по отношению к лучу $L_0 = l^+(e, x_0)$, то введем в рассмотрение следующий луч:

$$L_0^- = (l\,(e, x_0) \setminus L_0) \cup \{e\}.$$

Лемма 5. *Пусть P — линейчатый порядок по отношению к лучу L_0. Тогда существует линейчатый относительно L_0^- порядок P', который линейно-связный; $L_0^- \subset P'$; и любой P-изотонный гомеоморфизм будет P'-изотонным. Кроме того, $P' \subset C^-$.*

Доказательство. (*а*) Множество $\widetilde{P}$ (см. (3.2)) линейчато относительно L_0^-.

В самом деле, пусть $x \in \widetilde{P}$. Достаточно показать, что $L_{0x}^- \subset \widetilde{P}$. Предположим противное, и пусть $y \neq x$, $y \in L_{0x}^-$, но $y \notin \widetilde{P}$. Тогда найдется z, для которой $e \in \partial Q_z$ и $y \in \overset{\circ}{Q}_z$. Пусть $\delta > 0$ такое число, что $B(y, \delta) \subset \overset{\circ}{Q}_z$. Так как P линейчато относительно L_0, то $L_{0y} \subset Q_z$. Значит, $x \in Q_z$. Но $x \in \widetilde{P}$, т. е. существует точка $v \in B(x, \delta/2)$, но $v \notin Q_z$. Тогда $v \in L_{0w}$, где $w \in B(y, \delta)$ — некоторая точка. Отсюда следует, что $w \in \overset{\circ}{Q}_z$, а, значит, в силу линейчатости порядка P $v \in Q_z$. Получили противоречие.

(*б*) $L_0^- \subset \widetilde{P}$. В самом деле, так как $e \in \widetilde{P}$, то методом, изложенным в пункте (а), получаем требуемое.

(в) Обозначим через S ту часть множества $\widetilde{P}$, которая соединяется с e непрерывным путем, лежащим в $\widetilde{P}$. Множество S не пусто в силу пункта (б) и удовлетворяет благодаря лемме 3 условиям леммы 4. Тогда $\mathrm{ord}\,(S)$ — линейчатый относительно L_0^- линейно-связный порядок в E^n (см. (3.4)).

Очевидно, $P' = \mathrm{ord}\,(S)$ — искомый порядок.

Лемма 5 доказана.

(3.6) Лемма 6. *Пусть порядок P удовлетворяет условиям* А), Б) *и* В). *Тогда существует выпуклый конус K с острой вершиной e и внутренними точками такой, что любой P-изотонный гомеоморфизм f будет удовлетворять равенству*

$$f(K_x) = K_{f(x)}.$$

Доказательство. Пусть $L_1, \ldots, L_n$ — лучи, о которых говорится в условии В). Ясно, порядок P линейчатый по отношению к любому из этих лучей. Положим $L_i^- = (l\,(e, x_i) \setminus L_i) \cup \{e\}$, где $x_i \in L_i\,(x_i \neq e)$ — произвольная точка на L_i.

Если P' — порядок, полученный из P в соответствии с леммой 5, то P' будет линейчатым по отношению к любому лучу L_i^-. Более того, $L_i^- \subset P'$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $P' \subset C^-$. Обозначим через K контингенцию множества P' в точке e. Ясно, что $L_i^- \subset K$ $(i = 1, \ldots, n)$. По теореме 1а из ([2]) контингенция K есть выпуклый конус с острой вершиной. Следовательно, K имеет внутренние точки. Поскольку $P' \subset C^-$, то P' удовлетворяет условию теоремы 1 из ([2]). Значит, K совпадает с объединением всех направленных кривых (см. ([2]), с. 5), исходящих из e. Отсюда следует, что любой P-изотонный гомеоморфизм f будет удовлетворять равенству $f(K_x) = K_{f(x)}$.

Лемма 6 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы А

(4.1) Пусть E — некоторая гиперплоскость, а I — вектор (или луч L), не параллельный E.

Определение 4. *Смещением* d_{EI} (или d_{EL}) называется отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1) d_{EI} (или d_{EL}) есть гомеоморфизм E^n на себя;

2) на каждой гиперплоскости, параллельной E, d_{EI} (соответственно d_{EL}) есть сдвиг;

3) d_{EI} (или d_{EL}) переводит отрезки (лучи), равные и параллельные I (соответственно L) в такие же отрезки (лучи).

Определение 5. *Квазицилиндром* $Q(E, I)$ называется множество M, удовлетворяющее условиям:

1) существуют гиперплоскости E_1, E_2, ..., параллельные E, причем E_{i+1} получено из E_i сдвигом на вектор I, притом такие, что

$$M = \bigcup_i [M_i \cup (M \cap E_i)], \tag{6}$$

где каждое M_i есть цилиндр, образованный открытыми отрезками, равными I (как векторы) с концами на E_i и E_{i+1};

2) M не допускает представления (6) с той же гиперплоскостью E и вектором I', параллельным I, но большим, чем I.

Определение квазицилиндра $Q(E, L)$, где L — луч, теперь очевидно. Приведенные определения мы взяли из (2).

(4.2) Теорема А. *Пусть P — порядок в E^n, удовлетворяющий условиям* А), Б) *и* В). *Тогда любой P-изотонный гомеоморфизм $f: E^n \to E^n$ либо является аффинным преобразованием, либо P есть квазицилиндр и f имеет вид*

$$f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_p, \tag{7}$$

где f_0 — аффинное преобразование, а d_i есть $d_{E_i I_i}$ или $d_{E_i L_i}$. Причем порядок, в котором стоят d_i, несуществен.

Доказательство. Пусть P — порядок, удовлетворяющий условиям А), Б) и В). В силу леммы 6 любой P-изотонный гомеоморфизм f будет сохранять семейство множеств $\{K_x : x \in E^n\}$, где K — некоторый замкнутый выпуклый конус с острой вершиной. Причем $\overset{\circ}{K} \neq \varnothing$. Очевидно, K задает связный порядок в E^n. Тогда по теоремам 3, 4 А. Д. Александрова из (2) гомеоморфизм f будет либо аффинным преобразованием, либо представляется в виде

$$f = f_0 \circ D_1 \circ \ldots \circ D_m, \tag{8}$$

где f_0 — аффинное преобразование, а D_i есть $d_{E_i I_i}$ или $d_{E_i L_i}$. Причем порядок, в котором стоят смещения D_i, несуществен. Остается показать, что в случае, когда f имеет вид (8), P — квазицилиндр, а f определяется формулой (7) [2)]. Но эта ситуация достаточно подробно изучена в работе (2) в пп. 6.3—6.8. Причем в этих рассуждениях А. Д. Александрова несущественно предположение о связности порядка. Следовательно, мы убеждаемся, что (8) влечет квазицилиндричность порядка P [2)].

Теорема доказана.

[2)] Точнее, либо f аффинно, либо P — квазицилиндр.

Мы выражаем глубокую благодарность А. Д. Александрову, который предложил эту задачу, а также всячески способствовал нашим исследованиям.

Омск,
Омский государственный университет

Статья поступила
21 июня 1978 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Александров А. Д.* Отображение семейств множеств. Докл. АН СССР, 1970, т. 191. № 3, с. 503—506.
[2] *Александров А. Д.* Отображения упорядоченных пространств. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1972, т. 78, с. 3—21.
[3] *Гуц А. К.* Отображения упорядоченного пространства Лобачевского. Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 1, с. 35—37.
[4] *Александров А. Д.*, *Овчинникова В. В.* Замечания к основам теории относительности. Вестник Ленинград. ун-та, 1953, № 11, с. 95.
[5] *Александров А. Д.* О преобразованиях Лоренца.— Успехи мат. наук, 1950, т. 3 (37), с. 187.
[6] *Zeeman E. C.* Causadity implies the Lorentz group. J. math. phys., 1964, v. 5, № 4, p. 490.