

ТЕКТОНИЧЕСКИЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ И ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ

А.К. Гуц

доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, e-mail: aguts@mail.ru

Федеральный исследовательский центр «Субтропический научный центр
Российской академии наук», Сочи, Россия

Аннотация. Статья является обзорной и представляет исследования по применению математической теории катастроф к землетрясениям. Эти работы главным образом успешно ведутся в Китае и России. Отобраны статьи, в которых отражены такие катастрофы, как «складка», «сборка», «ласточкин хвост» и «бабочка».

Ключевые слова: землетрясения, теория катастроф, обзорная статья.

Введение

Данная статья является обзором работ по применению математической теории катастроф [1, 2] к описанию землетрясений, которые представляют собой опасные природные явления, приводящие к бедствиям, разрушениям и человеческим жертвам во многих регионах самых различных стран.

В статье [3] авторы отмечают, что суть землетрясения заключается в том, что «возмущённая своей окружающей средой система горных пород-разломов переходит из неустойчивого состояния равновесия до землетрясения в устойчивое квазистатическое состояние равновесия после землетрясения. Теория катастроф заключается в том, как описать прерывистое изменение состояния системы, возникающее в результате непрерывного изменения системного управляющего параметра».

Затухание напряжения землетрясения и смещение афтершокового разлома являются типичными явлениями прерывистых изменений во время землетрясения [4]. Прерывистые изменения системы разломов в результате непрерывного изменения некоторого системного управляющего параметра – это область исследований математической теории катастроф.

Отметим, что хотя всплеск исследований на применение теории катастроф в различных областях науки приходится на 1970–80-е гг. с последующей потерей интереса к подобного рода изысканиям, этого нельзя сказать применительно к землетрясениям. В XXI в. постоянно появляются публикации, хотя и не часто, в которых пытаются не просто описать явления на языке теории катастроф, но и вывести соответствующую потенциальную функцию из тех или иных механических соображений и моделей.

1. Что такое землетрясение

Землетрясение – это подземные толчки и колебания земной поверхности. Причина землетрясения – высвобождение потенциальной упругой энергии вследствие внутреннего разрушения материала Земли [5, с. 13].

Землетрясения разделяются на:

Обвальные (провальные) землетрясения – обвалы пустот в земной коре.

Вулканические землетрясения – результат деятельности вулканов.

Тектонические (разломные) землетрясения – смещение, сдвиг тектонических плит в земной коре.

Обвальные землетрясения связаны с образованием под землёй пустот, возникающих под воздействием грунтовых вод, подземных рек или связанных с большими оползнями. При этом верхний слой поверхности земли обрушивается вниз, вызывая небольшие сотрясения.

Вулканические землетрясения – это землетрясения, при которых толчки возникают в результате высокого напряжения в недрах вулкана. Причина таких землетрясений – лава, вулканические газы. Землетрясения этого типа слабы, но продолжаются долго, многократно – недели и месяцы. Тем не менее опасности для людей землетрясение этого вида не представляет. Определения взяты из Википедии.

Нас интересуют тектонические землетрясения. Как они возникают?

Земная кора состоит из относительно целостных блоков. Блоки находятся в постоянном движении относительно друг друга. Границы между блоками – прослойки – представляют геоматериал, менее прочный, чем сами блоки. Движение блоков приводит к деформации как самих блоков, так и прослойки.

Землетрясение происходит, когда два блока внезапно скользят один по другому. Поверхность, по которой они скользят, называется *разломом* или *плоскостью разлома* [1]. Лишь немногие тектонические разломы выглядят в виде щелевидных полостей. В большинстве случаев эти полости заполнены или обвалившимися в них обломками окружающих пород, или минеральными зёрнами, выкристаллизовавшимися из просочившихся по разломам (разрывам) подземных вод, или закристаллизовавшимися магматическими расплавами. Поэтому часто разлом (разрыв) предстаёт перед нами в виде пластинообразного тела, которое отличается от окружающей среды (породы) меньшей или большей прочностью, а также другими физическими свойствами. На местности одни разломы проявляются в виде цепочек озёр, долин и иных понижений рельефа. Другие разломы (разрывы), наоборот, выглядят гребнями в рельефе. Немало разломов, даже крупных, которые практически никак не выражены в рельефе и обнаруживаются только при сопоставлении многочисленных обнажений горных пород или проходке горных выработок [2, с. 126].

Границы между блоками и сами блоки должны находиться под действием существенных касательных напряжений. Наличие высоких касательных напряжений, близких к пределу прочности материала блоков, – также существенная особенность земной коры [8].

При тектоническом землетрясении происходит разрядка упругих напряжений, возникающих при воздействии одного блока на другой. Границы блоков (плит) имеют множество разломов, и большинство землетрясений в мире происходит именно

по этим разломам. Поскольку края блока неровные, они цепляются за другие блоки, а остальная часть блока продолжает двигаться. Наконец, когда блок отодвинулся достаточно далеко, края на одном из разломов разрушаются и происходит землетрясение.

Пока края разломов сцеплены, а остальная часть блока движется, энергия, которая обычно заставляет блоки скользить мимо друг друга, накапливается. Когда сила движущихся блоков, наконец, преодолевает трение неровных краёв разлома и он отрывается, вся накопленная энергия высвобождается. Энергия распространяется от разлома во всех направлениях в виде сейсмических волн. Сейсмические волны сотрясают землю, проходя через неё, и когда волны достигают земной поверхности, они сотрясают землю и всё, что находится на ней.

За последние два века сильные землетрясения происходили как раз в результате образования крупных разломов, выходящих на поверхность Земли [10].

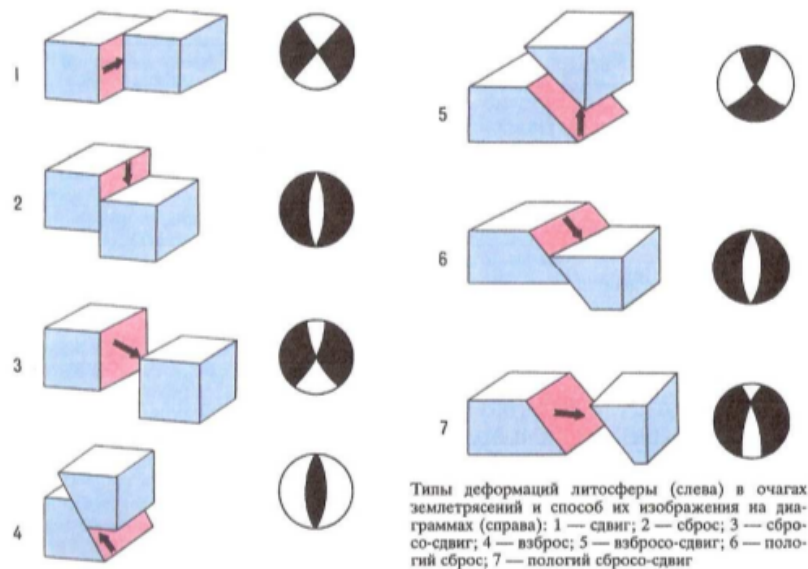


Рис. 1. Смещение блоков относительно друг друга [21]

Смещению пород вдоль разлома препятствует трение. Вследствие этого энергия, вызывающая движение, накапливается в форме упругих напряжений пород. Когда напряжение достигает некоторой критической точки, превышающей силу трения, происходит резкий разрыв пород с их взаимным смещением; накопленная энергия, освобождаясь, вызывает волновые колебания поверхности земли – землетрясения.

Сила землетрясения измеряется в магнитудах M .

«Иногда землетрясение сопровождается *форшоками*. Это меньшие землетрясения, которые происходят в том же месте, что и последующее более сильное землетрясение. Сейсмологи не могут сказать, что землетрясение является предвестником, пока не произойдёт более сильное землетрясение. Самое сильное и главное землетрясение называется *главным толчком*. За главными толчками всегда следуют *афтершоки*. Это небольшие землетрясения, которые происходят позже в том же

месте, где произошёл главный толчок. В зависимости от размера главного толчка афтершоки могут продолжаться в течение недель, месяцев и даже лет после главного толчка!» [1]

2. Теория катастроф

Математическая теория катастроф – это раздел теории особенностей дифференцируемых отображений и теории бифуркаций, который выделился в отдельную теорию благодаря теореме о семи катастрофах, доказанной французским математиком Рене Томом, а также благодаря статьям английского математика Кристофера Зеемана, много занимавшегося её приложениями в разных областях человеческих знаний. В какой-то мере такую теорию пытался в XIX в. создать российский математик Н.В. Бугаев, отец известного поэта Андрея Белого.

2.1. Катастрофы Рене Тома

Пусть состояние некоторой системы, а в нашем случае это система разломов, описывается величиной $x \in \mathbb{R}^n$, которая со временем изменяется по закону

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial V(x, u)}{\partial x}, \quad u \in \mathbb{R}^k. \quad (1)$$

Семейство $V(x, u)$ имеет особенность в точке $x = 0$, если $V(0, u) = 0$, $d_x V(0, u) = 0$.

Множество $C_V = \{(x, u) : d_x V(x, u) = 0\}$ называется множеством катастроф семейства $V(x, u)$, или множеством равновесий, поскольку оно состоит из стационарных равновесий.

Среди стационарных равновесий есть вырожденные – это особенности, образующие множество особенностей:

$$\Sigma_V = \{(x, u) \in C_V : \det d_x^2 V(x, u) = 0\},$$

проекция $\pi_V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ которого на плоскость $u \in \mathbb{R}^k$ даёт бифуркационное множество:

$$B_V = \pi_V(\Sigma_V) = \{u \in \mathbb{R}^k : \exists x((x, u) \in \Sigma_V)\}.$$

При изменении системного параметра u с пересечением множества B_V происходит скачкообразная (прерывистая) смена равновесия. Это и есть катастрофа!

Справедлива

Теорема 1. Для $n \geq 1$ и $k \leq 4$ существует открытое и плотное множество структурно устойчивых гладких k -параметрических семейств $V(x, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, эквивалентных¹ вблизи любой точки одному из семи канонических семейств

$$CG(x) + F(x, u),$$

перечисленных в таблице 1.

Таблица 1. Катастрофы Тома при $k \leq 4$

Тип	n	k	$CG(x)$	$F(x, u)$
Складка	1	1	x^2	u_1x
Сборка	1	2	$\pm x^4$	$u_1x + u_2x^2$
Ласточкин хвост	1	3	x^5	$u_1x + u_2x^2 + u_3x^3$
Бабочка	1	4	$\pm x^6$	$u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^4$
Гиперболическая омбилическая точка	2	3	$x^3 + y^3$	$u_1x + u_2y + u_3xy$
Параболическая омбилическая точка	2	3	$\pm(x^2y + y^4)$	$u_1x + u_2y + u_3x^2 + u_4y^2$
Эллиптическая омбилическая точка	2	4	$x^3 - xy^2$	$u_1x + u_2y + u_3(x^2 + y^2)$

Мы видим, что формулировка этой теоремы раскрывает нам понятие *типичности* особенности, порождающей катастрофу: они образуют открытое плотное множество в многообразии всех гладких k -параметрических семейств функций. Иначе говоря, *почти любое* гладкое k -параметрическое семейство (с точностью до эквивалентности) указано в табл. 1.

2.2. Землетрясения с точки зрения теории катастроф

Суть землетрясения заключается в том, что нарушенная окружающей средой система горных пород-разломов переходит из неустойчивого состояния равновесия до землетрясения в устойчивое квазистатическое состояние равновесия после землетрясения [3].

Теория катастроф позволяет описать данное *прерывистое* изменение состояния системы, возникающее в результате непрерывного изменения системного параметра.

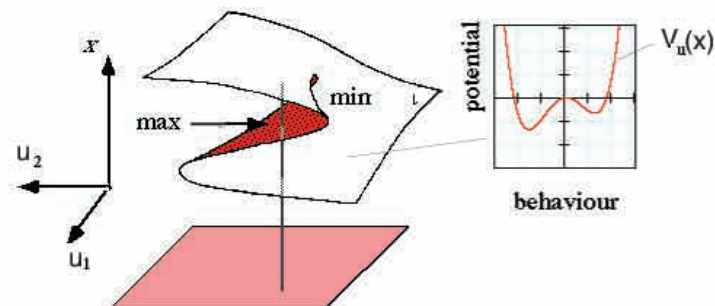


Рис. 2. Катастрофа «сборки»

¹Под эквивалентностью понимается достижение совпадения функций за счёт преобразования координат x и параметров u .

Устойчивые состояния – это локальные минимумы потенциальной функции $V(x, u)$, где x – переменная состояния, u – управляющий параметр (рис. 2). При изменении u так, что бифуркационное множество не пересекается, минимумы плавно передвигаются, меняя место дислокации переменной x . При пересечении бифуркационного множества происходит скачкообразное исчезновение одного локального минимума в точке x_1 и появление в ином месте x_2 другого минимума (рис. 3). *Неустойчивые состояния* – это локальные максимумы функции V .

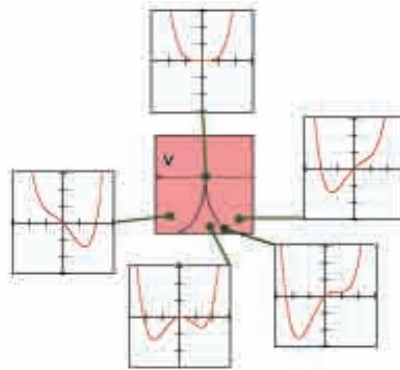


Рис. 3. Динамика появления и исчезновения максимумов и минимумов у функции $V_{(u_1, u_2)}(x) = V(x, u_1, u_2)$

Основная задача, стоящая перед исследователем, пытающимся описать землетрясение с помощью теории катастроф, состоит в построении механической или аналитической модели системы разломов, благодаря которой удастся вывести вид потенциальной функции $V(x, u)$, определить ее тип, выявить смысл переменных x и u , особенно последнего, и, опираясь на математику, описать ход землетрясения. Вычислив бифуркационное множество, можно понять, насколько далеки от него значения «управляющего землетрясением» параметра u , и, отслеживая его, надеяться предсказать землетрясение.

3. Катастрофа «сборка»: предсказание времени и магнитуды землетрясения

Катастрофа «сборка» является самой популярной катастрофой, которую используют в самых разнообразных исследованиях, касающихся описаний как природных, так и социальных явлений [1].

Поэтому не удивительно, что это же произошло при моделировании землетрясений. К сожалению, первые обнаруженные нами статьи на данную тему [13–15] были написаны в 1984, 1988 и в 1994 гг. на китайском языке и поэтому не попали в этот обзор.

Ниже мы подробно излагаем статью, опубликованную в 1989 г. китайскими же исследователями [11], предложившими алгоритм вычисления даты и магнитуды землетрясения, основанный на теории катастрофы «сборка».

Как известно, сейсмический разлом площадью S и сейсмическая энергия связаны уравнением [16]:

$$E = \frac{c}{2\mu}(\Delta\sigma)^2 S^{3/2}, \quad (2)$$

где μ – модуль сдвига, $\Delta\sigma$ – падение напряжений, c – безразмерная характеристика очага, составляющая от 0,2 до 0,4 [9].

Таким образом:

$$E \propto S^{3/2} \quad (3)$$

или

$$S \propto E^{2/3}. \quad (4)$$

Когда $\Delta\sigma$ почти постоянно, имеем для суммарной площади сейсмических разломов:

$$\sum S \propto \sum E^{2/3}. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) показывают, что площадь сейсмического разлома (или общая площадь сейсмических разломов) пропорциональна $2/3$ -й степени сейсмической энергии (или сумме $2/3$ -х степеней сейсмических энергий).

По формулам (4) и (5) временные ряды сейсмичности в изучаемом регионе могут быть преобразованы во временные ряды общей площади разломов. Суммарный площадно-временной ряд разломов по реальным данным в регионе, безусловно, отражает процесс развития разломов, т. е. сейсмогенез и землетрясения, происходящие в регионе, что может коррелировать с процессами, описываемыми моделью *IPE* В.И. Мячкина и О.Д. Воеводы [17].

С точки зрения теории катастроф наша цель – проанализировать потенциальную функцию, т. е. $\sum E^{2/3}$ как функцию времени t , и прояснить катастрофическое состояние развивающихся разломов.

Полагаем, что

$$\sum E^{2/3} = f(t). \quad (6)$$

Авторы делают важное предположение, что $f(t)$ и её разложение Тейлора изоморфны, т. е. одно переводится в другое с помощью диффеоморфизма. Иначе говоря, предполагается, что 4-определённой [1].

Тогда

$$\sum E^{2/3} = j^4 f = a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad (7)$$

где $j^4 f$ – 4-струя функции f .

Фактически авторы допускают, что рассматриваемая функция $f(t)$ является *типичной*. В принципе, это означает предположение о типичности рассматриваемого землетрясения. Можно, однако, задаться вопросом: почему берётся катастрофа «сборка», а не, скажем, «бабочка»? Единственный ответ, который напрашивается, – «сборка» проще, поэтому её и берём.

Член третьего порядка в уравнении (7) можно устранить преобразованием:

$$t \rightarrow z - q, \quad (8)$$

$$q = \frac{a_3}{4a_4}.$$

Таким образом, мы получаем:

$$\sum E^{2/3} = b_4 z^4 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0, \quad (9)$$

где

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^4 & -q^3 & q^2 & -q & 1 \\ -4q^3 & 3q^2 & -2q & 1 & 0 \\ 6q^2 & -3q & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Уравнение (9), очевидно, представляет собой катастрофу «сборки».

Обозначим:

$$\varepsilon = \frac{1}{4b_4} \sum E^{2/3}, \quad A = \frac{b_2}{2b_4}, \quad B = \frac{b_1}{4b_4}, \quad C = \frac{b_0}{4b_4} \quad (11)$$

и тогда уравнение (9) будет выглядеть следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{2} A z^2 + B z + C. \quad (12)$$

Следует отметить, что по сравнению со стандартным выражением для катастрофы «сборка», данным Постоном и Стюартом [1], в уравнении имеется дополнительный постоянный член C . Это сдвиговый член. Он не имеет значения для оценки опасности землетрясений, но для прогноза землетрясений незаменим.

Многообразие катастроф функции ε есть

$$C_\varepsilon = \{z : z^3 + Az + B = 0\}, \quad (13)$$

а бифуркационное множество:

$$B_\varepsilon = \{(A, B) : 4A^3 + 27B^2 = 0\}.$$

Обозначая

$$D = 4A^3 + 27B^2, \quad (14)$$

из теории катастроф мы узнаем, что когда $D < 0$, то параметры управления A и B находятся внутри бифуркационного множества, а ε находится в неустойчивом равновесии. Аналогично, когда $D > 0$, то A и B находятся вне бифуркационного множества, а ε находится в устойчивом равновесии. Наконец, при $D = 0$ параметры управления попадают точно на границу бифуркационного множества и ε находится в критическом состоянии между устойчивым и неустойчивым равновесием.

Детальный анализ показывает, что для $b_4 > 0$ величины $\sum E^{2/3}$ и ε находятся в одном и том же состоянии, а при $b_4 < 0$ – в противоположных состояниях.

Обратим внимание на то, что смысл управляющих параметров A и B авторами не проясняется, и это отчасти объясняется тем, что основная формула (7) не выводится, а постулируется.

3.1. Риск землетрясения

С учётом всех вышеперечисленных случаев, когда b_4 и D имеют противоположный знак, кривая $\sum E^{2/3}(t)$ может быть оценена как связанная с определённым риском землетрясения, а когда b_4 и D имеют один и тот же знак, риск землетрясения не распознаётся.

Дальнейший детальный анализ показывает (см. § 3.2), что только T_{max} соответствует z_0 , что удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial^3}{\partial z^2} \sum E^{2/3} < 0, \quad (15)$$

то есть:

$$\begin{aligned} z_0 - z^* < 0 \text{ при } b_4 > 0, \\ z_0 - z^* > 0 \text{ для } b_4 < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В опасный период сильного землетрясения соответствующая критическая точка z_0 взята из C_ε , а z^* равно:

$$z^* = \sqrt{-\frac{A}{3}}. \quad (17)$$

Следовательно, с помощью уравнений (16) и (17) мы можем оценить, приближается ли риск землетрясения или уже прошёл. Без всякого сомнения, по формулам (16) и (17) можно сделать вывод об отсутствии сейсмического риска в случае $A > 0$.

Вопрос, возникающий после анализа опасностей, если риск был выявлен, – насколько серьёзной является опасность землетрясения, вероятно, будет и где и когда будет опасность?

Касательно местоположения центра потенциального землетрясения его можно с уверенностью считать расположенным в регионе, где имеются данные о сейсмичности, отражающие микротрещинистость. Однако такая область обычно больше, чем хотелось бы, поэтому следует опираться на дополнительную информацию.

3.2. Магнитуда и время землетрясения

Авторы, как видно из названия параграфа, своё внимание сконцентрировали на предсказании магнитуды и времени землетрясения. В общем случае ордината критической точки кривой $f(t)$, соответствующая решению уравнения (13) (многообразие катастроф для ε), является мерой максимальной величины магнитуды.

Максимальную магнитуду M_{max} можно получить из $\sum E^{2/3}$, используя формулу Гутенберга – Рихтера:

$$\log E = 11,8 + 1,5M_s, \quad (18)$$

где M_s – магнитуда поверхностной волны. По абсцисса критической точки – это время T_{max} возникновения землетрясения. Из-за несовершенства несколько произвольного выбора временного и пространственного масштабов используемых данных точность M_{max} и T_{max} , рассчитанных указанным выше способом, сомнительна.

Чтобы улучшить наш прогноз, мы модифицируем результат следующим образом:

$$\widehat{M}_{max} = K_m M_{max}, \tag{19}$$

$$\widehat{T}_{max} = K_t T_{max}, \tag{20}$$

где \widehat{M}_{max} и \widehat{T}_{max} – планируемый прогноз максимальной магнитуды и соответствующего времени возникновения землетрясения соответственно; M_{max} и T_{max} опираются на уравнения (7), (8), (13) и (18), а K_m и K_t – безразмерные константы, обе являющиеся квадратичными функциями от M_{max} и T_{max} , представленные как:

$$K_m = \alpha M_{max}^2 + \beta T_{max}^2 + \gamma M_{max} + \tau T_{max} + \omega, \tag{21}$$

$$K_t = \lambda M_{max}^2 + \mu T_{max}^2 + \xi M_{max} + \eta T_{max} + \zeta, \tag{22}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \xi, \eta, \zeta$ – неопределенные множители. Они определяются на основе большого количества данных по предыдущим землетрясениям с использованием метода наименьших квадратов.

Для того чтобы дать предсказание по величинам \widehat{M}_{max} и \widehat{T}_{max} , нужно вычислить неопределённые коэффициенты.

Это делается на основе данных ряда исторических последовательностей землетрясений. В результате проделанной работы авторы получили значения этих коэффициентов для Китая (см. табл. 2).

Значения коэффициентов в этой таблице могут корректироваться по мере накопления реальных данных. Единицы M_{max} и T_{max} в уравнениях (21) и (22) такие же, как и в уравнениях (19) и (20) (в нашем случае $год$ и M_s соответственно).

Таблица 2. Множители уравнений (21), (22) для Китая [11]

	Whole of China	Eastern China	Sichuang-Yunnan area
α	$+4.2029 \times 10^{-2}$	-1.9779×10^{-1}	$+3.4834 \times 10^{-2}$
β	-7.1445×10^{-4}	-1.2125×10^{-3}	$+1.1675 \times 10^{-3}$
γ	-5.7520×10^{-1}	$+2.3556$	-5.0214×10^{-1}
τ	$+1.6227 \times 10^{-3}$	$+2.2290 \times 10^{-3}$	-1.9062×10^{-2}
ω	$+3.0918$	-5.6938	$+2.9410$
λ	$+7.5398 \times 10^{-2}$	$+2.4524 \times 10^{-1}$	$+8.9945 \times 10^{-2}$
μ	$+2.3991 \times 10^{-3}$	$+6.3701 \times 10^{-3}$	$+3.2341 \times 10^{-3}$
ξ	-7.3152×10^{-1}	-2.2975	-1.2416
η	-1.1509×10^{-1}	-2.0220×10^{-1}	-9.4261×10^{-2}
ζ	$+3.8836$	$+7.6945$	$+6.0797$

3.3. Алгоритм предсказания землетрясения

Изложим алгоритм предсказания землетрясения.

(1) На основе геологических и тектонофизических данных выбираем регион с относительно однородными геологическими условиями и сейсмичностью. Протяжённость региона может быть определена в соответствии с данными сейсморазведки и геологической структуры. Должна быть доступна серия записанных данных по землетрясениям.

(2) Фиксируется время начала зарегистрированной умеренной микросейсмичности; выбор обычно делается между первым землетрясением в последовательности или прекращением последнего землетрясения в последовательности. Если это трудно определить для новой последовательности землетрясений, в качестве времени начала можно принять начальную точку нелинейного сегмента его кривой $\sum E^{2/3}(t)$. Период, который охватывают данные по землетрясениям, должен составлять от нескольких месяцев до нескольких лет или даже десятилетий, а число зарегистрированных землетрясений должно быть больше шести, но чем больше, тем лучше. Однако данные о микросейсмичности не всегда улучшают прогноз. Наш предварительный опыт показывает, что данные для $M \geq 2,5$ требуются для прогнозирования событий с $M > 5$. Для оценки вероятности событий с $M > 6$ нижний предел все еще может быть выше, чем $M = 2,5$, если данных достаточно.

(3) Выбранные данные переводим в энергию E , используя формулу (18).

(4) Используем принцип:

$$\sum_i \left(\sum E^{2/3} - \sum E_i^{2/3} \right) = \min, \quad (23)$$

где i – номер использованного в расчётах зарегистрированного землетрясения, для того, чтобы определить коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 в (7).

(5) Вычисляем $q, b_0, b_1, b_2, b_4, A, B, C, D$, используя уравнения (8), (10), (11), (14).

(6) По знакам b_4 и D оцениваем опасность землетрясения. Если b_4 и D имеют один и тот же знак, опасность землетрясения не будет распознана, и процедура будет остановлена.

Если b_4 и D имеют разные знаки, то определяется риск землетрясения и для составления прогноза потребуются дальнейшие расчёты и анализ.

(7) Используя формулы Кардана решения алгебраического уравнения 3-й степени, устанавливается действительное решение кубического уравнения (13). Если решение не удовлетворяет условиям (16) и (17) или $A > 0$, что снова указывает на отсутствие риска землетрясения, анализ на этом прекращается.

Напротив, если решение удовлетворяет условиям (16) и (17), соответствующее значение t в уравнении (7) будет указывать на время риска надвигающегося землетрясения; его обозначаем как T_{max} .

(8) Подставляем $t = T_{max}$ в уравнение (7) и вычисляем $\sum E_{max}^{2/3}$, а затем переходим к вычислению соответствующего M_{max} с помощью уравнения (18).

(9) Вычисляем константы K_m и K_t , следуя уравнениям (21) и (22).

(10) Величины \hat{M}_{max} и \hat{T}_{max} вычисляются с использованием уравнений (19) и (20). Следует напомнить, что \hat{M}_{max} и \hat{T}_{max} являются прогнозами магнитуды и времени возникновения наиболее опасного землетрясения в последовательности землетрясений в соответствующем регионе.

4. Катастрофа «бабочка»: сейсмические процессы

В предыдущем параграфе фактически постулируется формула (7), предполагающая, что сейсмическая энергия как функция времени является 4-определённой

функцией, т. е. представляется катастрофой «сборка». Очевидно, хотелось бы построить математическую модель землетрясения, в которой одна из особенностей, одна из семи катастроф Тома, не постулируется, а выводится.

Такое делается в статьях С.А. Арсеньева [18–20].

Рассматривается сейсмически активный разлом, один из берегов которого движется относительно другого со скоростью v_0 (рис. 1) и строится механическая модель землетрясения из пружин и блоков (рис. 4).

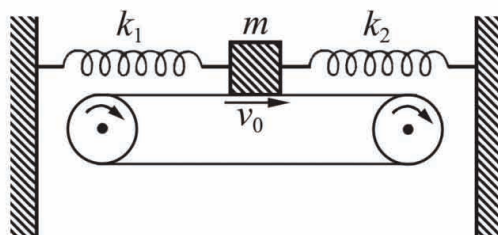


Рис. 4. Механическая модель колеблющегося блока массы m внутри очага землетрясения. Значения k_1 и k_2 являются коэффициентами упругого взаимодействия [18]

Блок с массой m лежит на движущемся со скоростью v_0 основании. Упругое взаимодействие с соседними блоками в разломе показано в виде пружин с жёсткостью k_1 и k_2 . Обозначая результирующий коэффициент упругости буквой k и *смещение* блока буквой x , уравнение движения блока записываем в виде

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F, \tag{24}$$

где точки над t обозначают производные по времени t , F – сила трения:

$$F = \mu G, \quad G \text{ – вес блок, } \mu = \frac{p - b}{1 + s - \beta x'_t} \text{ – коэффициент трения.} \tag{25}$$

Уравнение (24) приводится к уравнению для преобразованного *смещения* блока z :

$$z''_{\tau\tau} + z = \varepsilon \left[\left(k_1 - \frac{\delta}{\varepsilon} \right) z'_\tau + k_2 (z'_\tau)^2 + k_3 (z'_\tau)^3 + k_4 (z'_\tau)^4 + k_5 (z'_\tau)^5 \right] \tag{26}$$

посредством замены переменных:

$$x = \frac{1}{\omega_0 \beta} [z + \varepsilon k_0 + bN], \quad \tau = \omega_0 t,$$

$$\varepsilon = (p - b)N, \quad N = g\beta/\omega_0,$$

$\delta = h/(m\omega_0)$ – безразмерное демпфирование колебаний,

g – ускорение свободного падения,

$\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ – частота собственных колебаний блока.

В экспериментах определялись числа p, b, β . Их значения были либо $p = 0,620; b = 0,540; \beta = 0,166$ с/микромметр, либо $p = 0,625; b = 0,585; \beta = 0,30$ с/микромметр. Как видим, они достаточно близки друг к другу.

Наконец,

$$s = \beta v_0 - \text{скорость края разлома,}$$

и

$$\begin{aligned} k_0 &= 1 - s + s^2 - s^3 + s^4 - s^5, \\ k_1 &= 1 - 2s + 3s^2 - 4s^3 + 5s^4, \\ k_2 &= 1 - 3s + 6s^2 - 10s^3, \\ k_3 &= 1 - 4s + 10s^2, \\ k_4 &= 1 - 5s, \\ k_5 &= 1. \end{aligned} \tag{27}$$

Решение уравнения (26) ищем приближённо (с достаточной для практики точностью), используя метод медленно меняющихся амплитуд. Согласно этому методу решение уравнения (26) записывается в виде

$$z = a(\tau) \cos[\tau + \theta(\tau)], \tag{28}$$

и имеем уравнения для амплитуды $a(t)$ и фазы $q(t)$:

$$a'_\tau = -\varepsilon \sin(\tau + \theta) f(z_\tau), \tag{29}$$

$$a\theta'_\tau = -\varepsilon \cos(\tau + \theta) f(z_\tau), \tag{30}$$

где

$$f(z_\tau) = \left(k_1 - \frac{\delta}{\varepsilon}\right) z'_\tau + k_2 (z'_\tau)^2 + k_3 (z'_\tau)^3 + k_4 (z'_\tau)^4 + k_5 (z'_\tau)^5. \tag{31}$$

После осреднения уравнений (29), (30) по периоду 2π , в течение которого амплитуда и фаза почти не меняются, получим уравнение для амплитуды a

$$\frac{da}{d\tau} = Co \cdot a + \lambda a^3 + ea^5, \tag{32}$$

с коэффициентами

$$Co = \frac{\varepsilon}{2} \left(k_1 - \frac{\delta}{\varepsilon}\right), \quad \lambda = \frac{3\varepsilon}{8} k_3, \quad e = \frac{5\varepsilon}{16} k_5.$$

Уравнение для фазы после осреднения приводит к решению $\theta = const$, т. е. фаза колебаний не меняется со временем. Произвольность фазы позволяет считать её степенью свободы данной динамической системы.

Уравнение (32) запишем в виде

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{\partial V}{\partial a}, \tag{33}$$

$$V(a) = \frac{Co}{2}a^2 + \frac{\lambda}{4}a^4 + \frac{e}{6}a^6. \quad (34)$$

Мы видим, как пишет автор, появляется катастрофа «бабочка»², которая управляет амплитудой смещения краёв разлома. Это говорит о том, что в предыдущем параграфе, где авторы используют в своих рассуждениях катастрофу «сборка», следовало бы опираться на катастрофу «бабочка». Впрочем, их статью [11] можно переписать, заменив «сборку» на «бабочку».

Отсутствие нечётных степеней в выражении (34) говорит о *структурной неустойчивости* данного описания динамики разлома, т. е. правая часть уравнения (33) не является инвариантной при малых шевелениях переменной и параметров.

Посмотрим, какой смысл имеют управляющие параметры a , λ и e . Поскольку p , b , ω_0 , – константы, а ε одинаковым образом входит в эти параметры, то из предыдущих формул видно, что управляющие параметры являются функциями скорости края разлома s

$$Co = f_1(s), \quad \lambda = f_2(s), \quad e = f_3(s),$$

т. е. мы имеем ситуацию с изменением управляющих параметров, задающих кривую в пространстве (Co, λ, e) . Следовательно, если эта кривая пересекает бифуркационное множество B_V , то возможно скачкообразное изменение величины x , т. е. скачком смещаются края разлома, что и приводит к *главному толчку* (mainshock).

Заметим, что величина s , как видно из (25), в большой степени задаёт силу трения, в силу этого следует связывать управляющие параметры с трением блока, которая сдерживает скорость движения блоков.

5. Разломное землетрясение как катастрофа «ласточкин хвост»

Землетрясения разнообразны, и думать, что любое из них может быть описано как катастрофа «сборка», было бы весьма наивно. В случае того, что написано в § 3, это простое постулирование «сборки», которое делалась с одной целью – выйти на теорию катастроф в описании землетрясений. В § 4 автор предлагает уже механическую модель разломного землетрясения и приходит к катастрофе «бабочка». Но только ли эти два типа катастрофы могут встречаться? Если речь идёт об описании состояния разлома только одной переменной, то возможна ещё катастрофа «ласточкин хвост».

В этом параграфе излагается механическая модель разломного землетрясения, которая как раз и приводят нас к катастрофе «ласточкин хвост» [22]. В принципе, и катастрофа «ласточкин хвост», и катастрофа «бабочка» – это всего лишь усложнения, поскольку они представляет собой своеобразный набор катастроф «сборка».

²Формально, как видно из табл. 1, у катастрофы «бабочка» коэффициент при 6-й степени равен константе, т. е. в нашем случае это коэффициент e . Поэтому говорить, что имеет место катастрофа «бабочка» не совсем правильно.

5.1. Смягчение повреждений и гидравлические смягчающие свойства разлома

Как и другие геоматериалы, как только напряжение достигает некоторых значений, происходит разрушение среды в зоне разлома, одновременно с этим разлом начинает дислокироваться, т. е. начинают смещаться блоки, пласты земной коры. Величина напряжения, при которой происходит дислокация разлома, называется начальной прочностью. Дислокация разлома свидетельствует о неупругом деформировании среды в зоне разлома. По мере смещения разлома породы в зоне разлома повреждаются, прочность разлома частично снижается вместе с развитием повреждения (на языке пластичности это явление называется размягчением деформации).

Большинство материалов в разломе в той или иной степени имеют трещины. Кристалльно чистая вода из горных пород глубоко под землёй может отделиться и попасть в разлом из-за тектонического движения. Вода с поверхности может проникнуть в неглубокую часть разлома. Химическое воздействие воды на заполняющий материал в разломе может частично снизить прочность разлома, это называется *гидравлическим размягчением* (на языке механики разрушения это явление называется коррозией под напряжением).

При создании нелинейной механической модели землетрясения необходимо изучить влияние различных видов причин на процесс землетрясения. Общую определяющую формулу следует значительно упростить, сохраняя при этом свойства сильной нелинейности. Простейшая формула может иметь вид нелинейной зависимости напряжения сдвига τ в плоскости разлома от смещения разлома u .

Иначе говоря, примем, что

$$\tau = f\left(\frac{u}{u_1}\right) = \tau_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{u_1}\right)\right], \quad (35)$$

где τ_0 – начальная прочность разлома на сдвиг.

Когда касательное напряжение в плоскости разлома $\tau < \tau_0$, то «разлом» не смещается. Как только напряжение сдвига достигает значения τ_0 , разлом начинает смещаться. Причём вместе с увеличением смещения u напряжение сдвига τ в плоскости уменьшается. Это показывает, что формула (35) выражает явление размягчения повреждений, где u_1 – это значение u , соответствующее точке перегиба на кривой зависимости $\tau - u$.

Наклон кривой функции (35) при $u = u_1$ равен

$$\left.\frac{d}{du}f\left(\frac{u}{u_1}\right)\right|_{u=u_1} = -\frac{\tau_0}{u_1}e^{-1/2} \quad (36)$$

и его абсолютное значение определяет жёсткость разлома:

$$K_f = \frac{\tau_0}{u_1}e^{-1/2}. \quad (37)$$

Для представления гидравлического умягчения мы можем ввести гипотетическую функцию гидравлического умягчения:

$$g(\zeta) = (1 - R)(1 - \zeta)^2 + R, \quad (38)$$

где переменная ζ отражает содержание воды, R – доля прочности при насыщении, $g(\zeta)$ – монотонно убывающая функция. Когда среда насыщенная, $\zeta = 0$, поэтому $g(0) = 1$.

Заметим, что вид функции в формуле (38) отражает экспериментальные данные по кварцевому сланцу (см.: [22]).

Если рассматривать смягчение повреждений и гидравлическое смягчение одновременно, то искомая определяющая формула разлома принимает вид:

$$\tau = f(u, \zeta) = \tau_0 g(\zeta) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u}{u_1} \right)^2 \right]. \quad (39)$$

При $\zeta = 0$ формула (39) переходит в формулу (35). Тогда мы видим, что формула (35) является определяющим соотношением при абсолютно сухом материале. Для разных значений ζ кривые формулы (39) показаны на рис. 5.

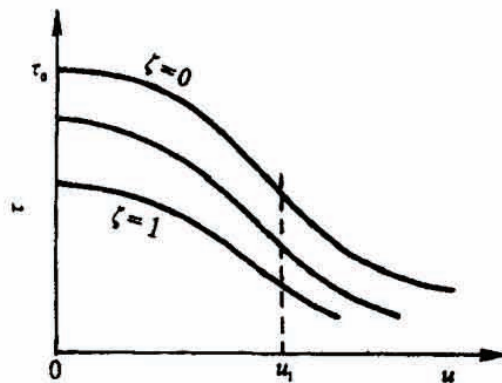


Рис. 5. Кривые для функций (39) [22]

Для всех значений ζ абсцисса точки перегиба на кривых одна и та же, обозначим её как u_1 . С увеличением ζ абсолютная величина наклона кривых в точке перегиба постепенно уменьшается.

5.2. Появление катастрофы

Нелинейная механическая модель разломного землетрясения, предложенная в 1994 г. Инь и другими [22], представляет собой механическую систему, образованную сдвигом разлома (strike-slip fault) и однородной окружающей породой, как показано на рис. 6.

Примем ширину разлома равной $2b$, расстояние от дальней границы окружающей породы до разлома равно B , на границе тангенциальное смещение равно a , а нормальное напряжение равно нулю. Деформируемое состояние этой системы выражается смещением u (где $u = b$), которое может представлять собой сдвиг разлома. Мы можем принять u как переменную состояния. Смещение в дальней зоне постепенно увеличивается от нуля до момента возникновения землетрясения, поэтому может быть управляющим параметром.

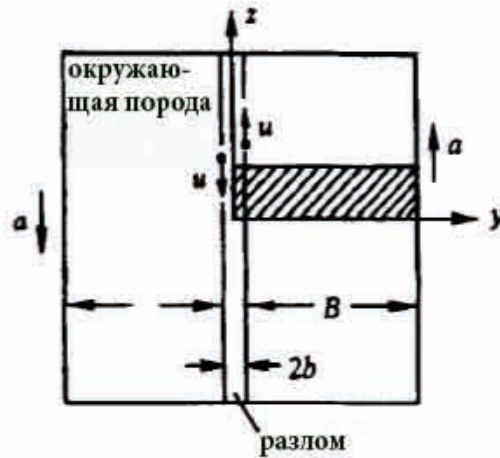


Рис. 6. Механическая модель сдвигового разломного землетрясения [22]

Разлом обладает свойствами размягчения повреждений (damage softening) и гидравлического размягчения, его определяющая связь даётся формулой (39). Окружающая порода является чисто упругой, её модуль упругости при сдвиге выражается через G . Предполагая, что деформации в зоне разлома и в окружающей породе однородны, мы можем просто изучить полосу, длина которой по простиранию и глубина равны единице (заштрихованная область на рис. 6).

Полная потенциальная энергия рассматриваемой системы разлом – окружение равна:

$$V(u, \zeta) = \frac{G \cdot (a - u)^2}{2B} + \int_0^u \tau_0 g(\zeta) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u}{u_1} \right)^2 \right] du. \quad (40)$$

В формуле (40) первое слагаемое справа – это упругая потенциальная энергия окружающих пород, второе слагаемое – диссипативная энергия разлома. Разложим полную потенциальную энергию $V(u, \zeta)$ в степенной ряд при $u = 0$ и сократим его до члена пятого порядка. Получаем

$$V = \frac{Ga^2}{2B} + u \left[-\frac{Ga}{B} + \tau_0 g(\zeta) \right] + u^2 \left(\frac{G}{2B} \right) + u^3 \left[-\frac{\tau_0 g(\zeta)}{6u_1^2} \right] + u^5 \left(\frac{\tau_0}{40u_1^4} \right). \quad (41)$$

Стоит отметить, что если разложить формулу (40) в точке $u = \pm\sqrt{3}u_1$, то можно также получить ряд, коэффициент которого при члене четвёртого порядка равен нулю, а коэффициент при члене пятого порядка отрицателен. Используя безразмерную переменную состояния:

$$x = \frac{u}{u_1} \quad (42)$$

и безразмерные управляющие переменные

$$p = -4g(\zeta), \quad (43)$$

$$q = 8\lambda e^{-1/2}, \quad (44)$$

$$r = -8e^{-1/2}\lambda\xi + 8g(\zeta), \quad (45)$$

уравнение (41) перепишем в виде

$$V = -\frac{\tau_0 u_1}{8} \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{p}{3}x^3 + \frac{q}{2}x^2 + rx + s \right). \quad (46)$$

В уравнениях (43), (44), (45) $g(\zeta)$ – коэффициент гидравлического размягчения, определяемый формулой (38), λ – коэффициент жёсткости, связывающий окружающую породу с разломом:

$$\lambda = \frac{G}{B} : K_f = \frac{G}{B} : \frac{\tau_0 e^{-1/2}}{u_1}, \quad (47)$$

но ξ представляет собой отношение смещения в дальней зоне к u_1 и называется параметром смещения в дальней зоне:

$$\xi = \frac{a}{u_1}. \quad (48)$$

Из условия стационарного равновесия изучаемой системы

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

находим поверхность равновесия:

$$C_V = \{(x, p, q, r) : x^4 + px^2 + qx + r = 0\}. \quad (49)$$

Приведённая выше формула представляет собой стандартную форму равновесной поверхности катастрофической модели типа «ласточкин хвост».

Множество особенностей

$$\Sigma_V = \{(x, p, q, r) : 4x^3 + 2px + q = 0\} \quad (50)$$

является подмножеством множества (49). Исключая x из уравнений в (49), (50), получаем бифуркационное множество B_V в пространстве (p, q, r) (см. рис. 7).

Изменения потенциальной функции $V = V(x, p, q, r)$ при $p = const > 0$ показаны на рис. 8.

Нас интересует смысл управляющих параметров p, q, r .

Из формулы (38) видно, что p – это гидравлическое умягчение, из (44), что q – жёсткость среды, и, наконец, (45) говорит, что r – функция гидравлического умягчения, жёсткости и смещения в дальней зоне разлома.

Изменения этих параметров, значения которых сами определяются величинами ζ, R, ξ , в принципе, неплохо согласуются, как показано в [22], с рядом наблюдаемых природных ситуаций. В заключении авторы этой статьи пишут, что хотя ими получены некоторые количественные результаты, в силу того, что предложенная катастрофическая модель имеет только одну переменную состояния, она слишком проста, но у них есть ещё несколько вдохновляющих идей с большей значимостью. Увы, мы их соответствующих публикаций на английском языке не нашли.

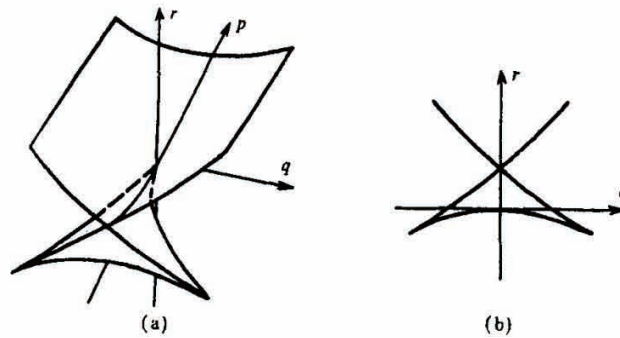


Рис. 7. (а) Бифуркационное множество B_V ; (б) Пересечение плоскости $p = const$ с B_V [22]. Видим «клювики», характерные для бифуркационного множества катастрофы «сборка»

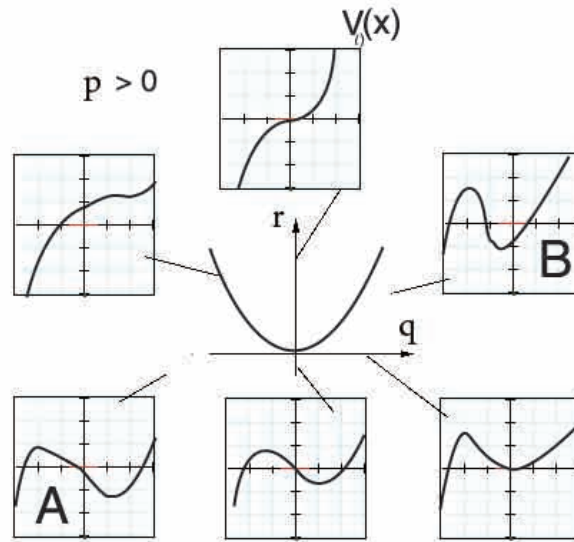


Рис. 8. «Ласточкин хвост». Динамика появления и исчезновения максимумов и минимумов у функции $V_{(p,q,r)}(x)$ в сечении $p = const > 0$. При переходе через B_V рождается или умирает равновесие

6. Землетрясения как катастрофа «складки»

Разломное землетрясение имеет три основные формы: сдвиговое (strike-slip fault), надвиговое (thrust fault) и сбросовое (normal fault). Кроме того, существуют и некоторые другие комбинированные формы (см. рис. 1). Интенсивность и магнитуда землетрясения надвигового разлома (thrust fault, взброс) выше, чем землетрясения сдвигового разлома, и ущерб более серьёзен [4].

6.1. Надвиговое землетрясение как «складка»

Механизм удара (толчка) надвигового (thrust fault, взброс) землетрясения представлен на рис. 9. Изображена зона разлома, или узкая зона разлома, образовавшаяся давным-давно в левом верхнем и правом нижнем углах дальнего поля. Цельная

порода между зоной разлома и узкой зоной разлома называется каменным мостом. Нетронутый массив горных пород на рис. 9 можно также представить как комплекс некоторых каменных перемычек в несовершенном разломе и выступающей части массива. Наибольшее главное напряжение σ_1 и наименьшее главное напряжение σ_3 параллельны соответственно осям x и y (главной) плоскости xy , а промежуточное главное напряжение σ_2 перпендикулярно плоскости xy .

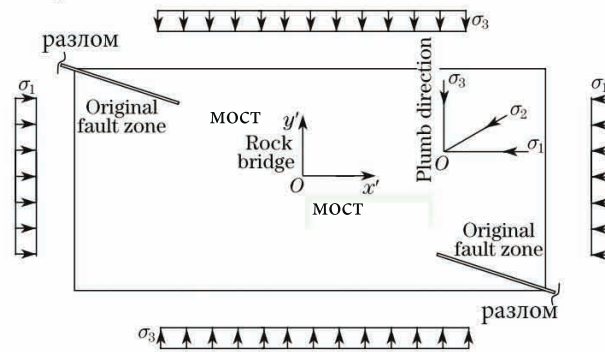


Рис. 9. Модель надвигового разлома [4]

Сила тяжести вышележащих мягких пород и (морской) воды составляет σ_3 и $\sigma_1 \gg \sigma_3$.

Концы исходных разломов будут расширяться под действием σ_1 , σ_2 и σ_3 . Следовательно, висячие стенки и подошвы первоначальных разломов не будут находиться в одной плоскости.

При растрескивании цельной породы из-за эффекта централизации пластической деформации породы зона разрушения представляет собой узкую зону вдоль линии окончания исходного разлома. Эта зона есть зона потенциального разлома перед главным толчком и зоной новообразованного разлома после главного толчка. Когда каменный мост разрушается и образуется вторичный разлом, правая окружающая порода резко поднимается вверх, происходит толчковое надвиговое землетрясение.

Основная модель анализа ударных воздействий землетрясения с надвиговым разломом показана на рис. 10. На рис. 10(а) пунктирная часть (ширина $2l$) – это потенциальная зона разлома, угол между потенциальным разломом и наибольшим главным напряжением σ_1 есть $\psi < 45^\circ$ ($\xi = 90^\circ - \psi > 45^\circ$).

На рис. 10 v_l и u_l – это касательное и продольное смещения при $x = -l$, соответственно, $\rho_l = \sqrt{u_l^2 + v_l^2}$, v_L и u_L при $x = -(l + L)$, $\rho_L = \sqrt{u_L^2 + v_L^2}$, $\rho_l = \sqrt{u_l^2 + v_l^2}$.

Анализируя данные модели, авторы приходят к формуле:

$$\left(\frac{v_l - v_{lt}}{v_{lt}} + \frac{m}{(1+m)^2}(1-K) \right)^2 - \frac{m^2}{(1+m)^4}(1-K)^2 - \frac{2(1-K)}{(1+m)^2} - \frac{2KJ}{Q(v_{lt})(1+m)^2} = 0, \tag{51}$$

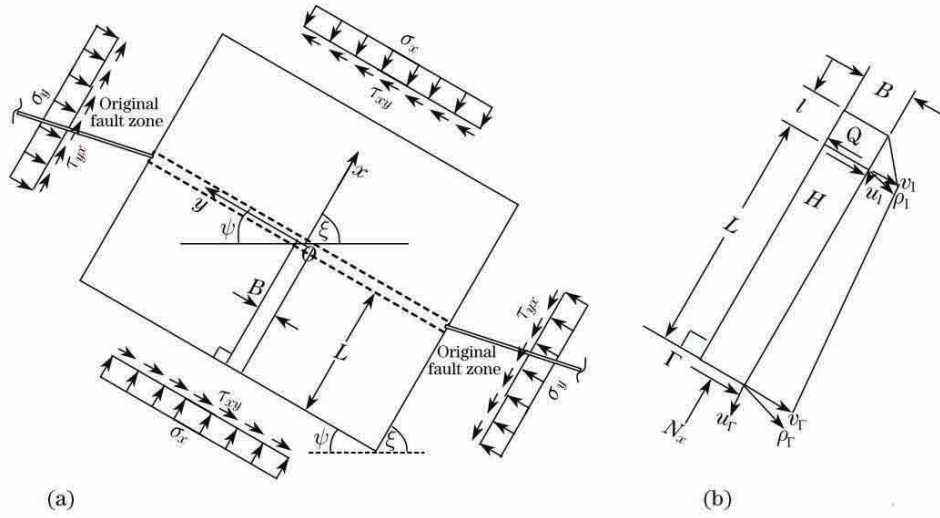


Рис. 10. Модель надвигового разлома в деталях [4]: (а) Основная модель удара: 3-мерный блок, размер которого равен $(L + l) \times B \times D$; (б) Модель с половинной полосой: половина полосы, взятой из 3-мерного (3D) большого грунта, см. (а) (размер которого в 3D равен $(L + l) \times B \times D$)

где

$$K = \frac{k_L}{\eta m} = \frac{Gl}{gLm} \exp\left(\frac{1+m}{m}\right). \quad (52)$$

Здесь

$k_L = GBD/L$ – тангенциальная жёсткость окружающей полоски породы;

$$\Gamma = k_L v_L;$$

$$\eta = \frac{gBD}{l} \exp\left(-\frac{1+m}{m}\right).$$

$Q(v_l)$ – сила сдвига при $x = -l$ в опоре (подошве) окружающей породы;

J – энергия окружающей потенциальной зоны разлома горной породы, вводимая сдвигом Γ (см. рис. 10 (б)), производящим работу на границе $x = -(L + l)$ дальнего поля, когда потенциальная зона разлома имеет единичную деформацию $\delta v_l (> 0)$;

m – натуральное число (чем больше m , тем круче (sleeper) зона размягчения);

v_{lt} – деформация в точке перегиба t в зоне размягчения кривой $Q(v_l)$, удовлетворяющая условию $Q''(v_{lt}) = 0$ на рис. 11.

Формула (51) объявляется авторами условием равновесия системы полуполосы окружающей горной породы – потенциальный разлом.

Какие для этого есть основания?

Пусть

$$\begin{cases} w = \frac{v_l - v_{lt}}{v_{lt}} + \frac{m}{(1+m)^2} (1-K), \\ a = -\frac{m^2}{(1+m)^4} (1-K)^2 - \frac{2(1-K)}{(1+m)^2} - \frac{2KJ}{Q(v_{lt})(1+m)^2}. \end{cases} \quad (53)$$

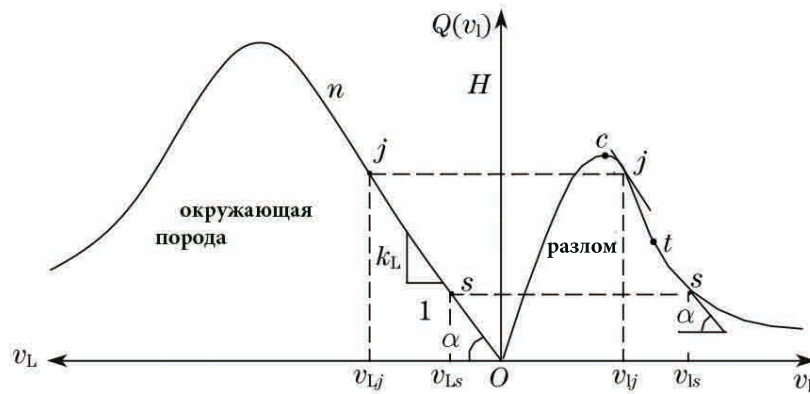


Рис. 11. Взаимосвязь между сдвиговыми и боковыми смещениями в полуплоскости окружающей породы и потенциальной зоной разлома [4]

Тогда (51) можно переписать в виде

$$w^2 + a = 0. \tag{54}$$

Как видим, формула (54) – это условие равновесия при катастрофе «складка», где w – переменная состояния, а a – управляющий параметр.

Кривая (54) представляет собой параболу в плоскости $w - a$. Прямая линия $w = 0$ делит параболу на верхнюю и нижнюю ветви точно так же, как показано на рис. 12.

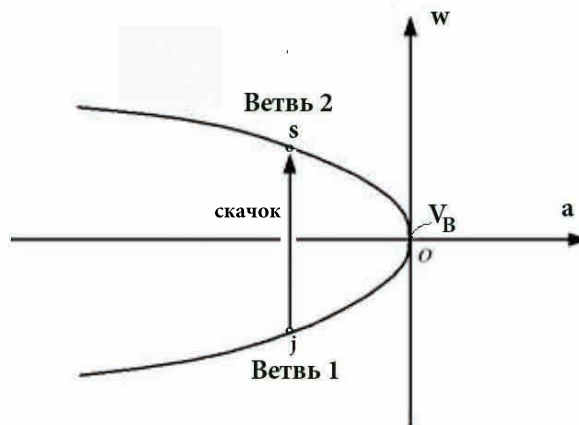


Рис. 12. Поверхность равновесия катастрофы «складка» и бифуркационное множество $V_B = \{0\}$

Величина K – важный параметр изучаемой системы, а именно отношение жесткости окружающей породы k_L к $|Q'(v_i)|$ равно ηt .

Для уравнения (54) находим соответствующую потенциальную функцию

$$V(w, a) = \frac{1}{3}w^3 + aw.$$

Поэтому на ветви 1 и ветви 2 имеем соответственно:

$$\frac{\partial V}{\partial w} < 0 \text{ и } \frac{\partial V}{\partial w} > 0.$$

Отсюда следует, что равновесное состояние системы неустойчиво на ветви 1, а равновесное состояние системы устойчиво на ветви 2. Именно основной толчок землетрясения в результате надвигового разлома приводит к тому, что положение равновесия системы в конечном итоге достигает ветви 2 на рис. 12.

Катастрофа «складка» характерна для триггерных систем, т. е. для систем, которые могут долго находиться в устойчивом равновесии, в устойчивом минимуме потенциальной энергии V . Это происходит, когда система находится на ветви 1 и при медленном изменении параметра a . Система движется по равновесиям ветви 1.

Но если $a = 0$, устойчивые и неустойчивые экстремумы функции V встречаются и исчезают. Это точка бифуркации $V_B = \{(0, 0)\}$. При $a > 0$ уже не существует устойчивого равновесия, будущее системы непредсказуемо. Для моделируемого нами землетрясения с надвиговым разломом посредством катастрофы «складка», сказанное означает следующее.

Для $a < 0$ система имеет два положения равновесия. Конечное положение равновесия системы будет изменяться от неустойчивой ветви 1 к устойчивой ветви 2. Именно основной толчок землетрясения при надвиговом разломе приводит к тому, что положение равновесия системы в конечном итоге скачком достигает ветви 2 на рис. 12. Но для некоторого $K > 1$ параметр $a \geq 0$ и отсутствуют равновесия. Тогда происходит «уход системы на бесконечность», что означает разрушительное землетрясение.

Наконец, ответим на традиционный вопрос о смысле управляющего параметра a ? Из (53) видим, что a связана с величинами J и Q , т. е. с энергией окружающей потенциальной зоны разлома горной породы, обязанной сдвигу Γ , производящему работу на границе $x = -(L + l)$. Переменная состояния w – это относительное смещение (деформация) в разломе при $x = -l$.

6.2. Сдвиговое землетрясение как «складка»

В статье [3] авторы изучали сдвиговое (strike-slip fault) землетрясение.

На рис. 13 представлена модель разломного землетрясения с направлением дислокации разлома, близким к горизонтальному. Существует определённый угол между осью касательного напряжения и поверхностью причинного разлома. Здесь окружающая порода и разлом сложены различными однородными горными массивами. Ширина полосы разлома и расстояние от внешней границы окружающей породы до разлома равны $2l$ и L соответственно. На границе дальнего поля имеются равномерные касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau$, равномерные напряжения сжатия σ_x и σ_y ($\sigma_x > \sigma_y$), которые являются внешней силой, окружающей системы горных пород-разломов. При этих внешних нагрузках напряжения в окружающей породе и разломе одинаковы. Однако из-за различных сред, определяющих соотношение, степени деформации в окружающей породе и разломе различны. Происходит постепенно увеличивающееся смещение $\rho_\Gamma = \sqrt{v_\Gamma^2 + u_\Gamma^2}$ на границе $(L + l)$ дальнего поля,

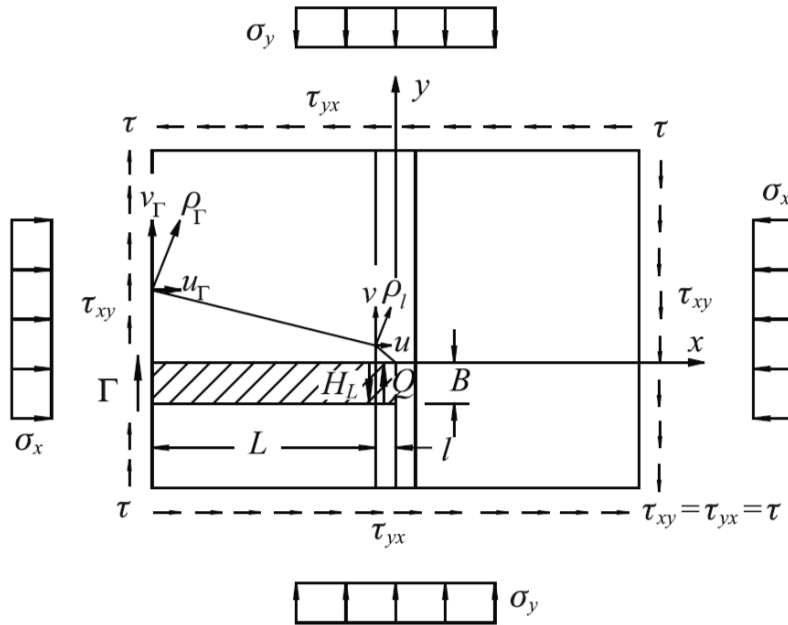


Рис. 13. Модель сдвигового землетрясения

где v_Γ и u_Γ – тангенциальное смещение и нормальное смещение при $x = -(L + l)$. Имеется соответствующее смещение $\rho_l = \sqrt{v^2 + u^2}$ на краю разлома l , где v и u – соответственно тангенциальное смещение и нормальное смещение при $x = -l$.

Исследуя данную модель, авторы приходят к формулам, похожим на формулы из § 6.1:

$$\left(\frac{v - v_t}{v_t} + \frac{m}{(1 + m)^2} (1 - K) \right)^2 - \frac{m^2}{(1 + m)^4} (1 - K)^2 - \frac{2(1 - K)}{(1 + m)^2} - \frac{2KJ}{Q(v_t)(1 + m)^2} = 0, \quad (55)$$

где

$$K = \frac{k_L}{\eta m} = \frac{Gl}{gLm} \exp\left(\frac{1 + m}{m}\right). \quad (56)$$

Полагая, что

$$\begin{cases} w = \frac{v - v_t}{v_t} + \frac{m}{(1 + m)^2} (1 - K), \\ a = -\frac{m^2}{(1 + m)^4} (1 - K)^2 - \frac{2(1 - K)}{(1 + m)^2} - \frac{2KJ}{Q(v_t)(1 + m)^2}, \end{cases} \quad (57)$$

перепишем (55) в виде

$$w^2 + a = 0. \quad (58)$$

Как видим, также приходим к условию равновесия при катастрофе «складка», где w – переменная состояния, а a – управляющий параметр.

7. Катастрофа «сборка» для сдвигового разлома

Продemonстрируем описание сдвигового землетрясения с помощью катастрофы «сборка», используя статью китайских авторов Чена, Ванга и Дайяна [5].

Рассмотрим горизонтальное простирание разлома и однородную породу, представляющие собой механическую систему, как показано на рис. 14. Расстояние от границы дальнего поля до края зоны разлома равно B , а ширина зоны разлома равна $2b$, а координаты (u, v, z) установлены, как показано на рис. 14.

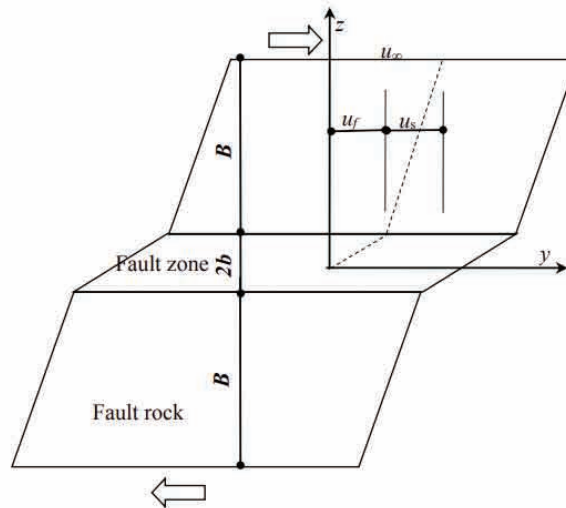


Рис. 14. Модель сдвигового разлома [5]

Пусть смещение дальнего поля равно u_∞ , смещение разлома – u_f и смещение окружающей породы – u_s :

$$u_\infty = u_f + u_s. \quad (59)$$

Полагаем, что окружающая порода является изотропной упругой средой, которая удовлетворяет закону Гука:

$$\tau_s = G_s \gamma_s, \quad (60)$$

где τ_s – напряжение сдвига окружающей породы; G_s – жесткость породы при сдвиге; γ_s – деформация породы при сдвиге. Для удобства перепишем его через R_s – усилие сдвига и сдвиговое перемещение u_s :

$$R_s = K_s u_s, \quad (61)$$

где $K_s = G_s A/B$, A – площадь поперечного сечения разлома, окружающего систему горных пород.

Основываясь на неоднородности прочности поверхности разлома, процесс макроразрушения поверхности разлома рассматриваем как процесс накопления локального микроэлемента разлома. Предполагается, что локальная интенсивность разлома по микроэлементам соответствует распределению вероятности Вейбулла

[6]. Соотношение напряжений и деформаций в зоне разлома принимается в виде отрицательной экспоненциальной формы [7]:

$$\tau_f = G_f \gamma_f e^{-\left(\frac{\gamma_f}{\gamma_0}\right)^m}. \quad (62)$$

В уравнении (62) τ_f – напряжение сдвига; G_f – начальная жесткость (разлома) при сдвиге; γ_f – деформация при сдвиге. Сдвиговое смещение u_f зоны разлома и деформация γ_f удовлетворяют геометрическому уравнению:

$$\gamma_f = \frac{u_f}{b}. \quad (63)$$

Полагая, что $K_f = G_f A/b$, соотношение между сдвигающей силой и сдвиговым смещением зоны разлома запишем как

$$R_f = K_f u_f e^{-\left(\frac{u_f}{u_0}\right)^m}, \quad (64)$$

где u_0 – постоянная величина; m – параметр формы, который связан с механическими свойствами среды разлома (график функции показан на рис. 15).

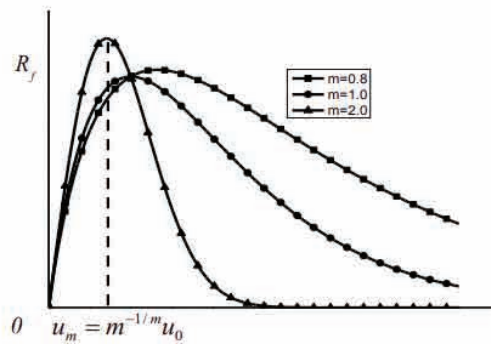


Рис. 15. График функции G_f [5]

Независимо от влияния силы тяжести общая потенциальная энергия системы горных пород, окружающих разлом, равна

$$V = \int_u^{u_\infty} R_s du_s + \int_0^u R_f du = \int_u^{u_\infty} K_s u_s du_s + \int_0^u K_f u e^{-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m} du. \quad (65)$$

Из (65) получаем уравнение поверхности равновесия

$$V' = K_f u e^{-\left(\frac{u}{u_0}\right)^m} + K_s (u_\infty - u) = 0. \quad (66)$$

Уравнение (66) раскладываем в степенной ряд по u в точке перегиба

$$u = u^* = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{1/m}$$

кривой R_f . Пренебрегая членами выше третьего порядка, получаем:

$$K_f \cdot u^* \cdot e^{-\left(\frac{u^*}{u_0}\right)^m} + K_s \cdot (u_\infty - u^*) + \left(K_f \cdot e^{-\left(\frac{u^*}{u_0}\right)^m} \cdot \left(1 - m \left(\frac{u^*}{u_0}\right)^m\right) + K_s \right) (u - u^*) - \\ - \frac{1}{2} m \cdot K_f \cdot \frac{(u^*)^{m-1}}{u_0^m} \cdot e^{-\left(\frac{u^*}{u_0}\right)^m} \cdot \left(m + 1 - m \cdot \left(\frac{u^*}{u_0}\right)^m \right) \cdot (u - u^*)^2 - \frac{1}{6} m K_f \cdot e^{-\left(\frac{u^*}{u_0}\right)^m} \cdot \\ \cdot \left((m^2 - 1) \cdot \frac{(u^*)^{m-2}}{u_0^m} - 3m^2 \cdot \frac{(u^*)^{2m-2}}{u_0^{2m}} + m^2 \cdot \frac{(u^*)^{3m-2}}{u_0^{3m}} \right) \cdot (u - u^*)^3 = 0 \quad (67)$$

Подставляя значение $u^* = \sqrt[m]{\frac{m+1}{m}} \cdot u_0$, уравнение (67) перепишем как

$$\left(\frac{u - u^*}{u} \right)^3 + \frac{6}{m \cdot (m+1)^2} \cdot \left(\frac{K_s}{K_f \cdot e^{-\frac{m+1}{m}}} - m \right) \left(\frac{u - u^*}{u^*} \right) + \\ + \frac{6}{m \cdot (m+1)^2} \cdot \left(1 - \frac{K_s}{K_f \cdot e^{-\frac{m+1}{m}}} \left(\frac{u_\infty - u^*}{u^*} \right) \right) = 0. \quad (68)$$

Пусть

$$K = \frac{K_s}{K_f m e^{-\frac{m+1}{m}}} = \frac{G_s b}{G_f B} = \frac{G_s b}{G_f B} = \frac{\text{(жесткость породы при сдвиге в блоке)}}{\text{(начальная жесткость в разломе)}} \cdot \frac{b}{B}, \quad (69)$$

$$\xi = \frac{u_\infty - u^*}{u^*} - \text{смещение в дальнем поле минус } u^*, \quad (70)$$

$$x = \frac{u - u^*}{u^*} = \frac{u_f - u^*}{u^*} - \text{безразмерное смещение в разломе}, \quad (71)$$

$$p = \frac{6}{(m+1)^2} \cdot (K - 1) - \text{отношение жесткостей в блоке и в разломе}, \quad (72)$$

$$q = \frac{6}{(m+1)^2} \cdot \left(\frac{1}{m} - K\xi \right) - \text{отношение жесткостей в блоке и в разломе (смещение } \xi). \quad (73)$$

Тогда уравнение (68) запишется в виде

$$x^3 + px + q = 0. \quad (74)$$

А это, как мы знаем, есть уравнения поверхности равновесия для катастрофы «сборка» с потенциальной функцией

$$V = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}px^2 + qx.$$

Таким образом, сдвиговый разлом, а значит и сдвиговое землетрясение, может описываться катастрофой «сборка». Смысл переменных x, p, q дан в формулах (70) – (73).

8. Заключение

В обзоре представлены, на наш взгляд, ключевые статьи по теоретико-катастрофическому описанию землетрясений. В отличие, скажем, от теоретико-катастрофического описания оползней [32], при изучении землетрясений задействованы все катастрофы Тома с одной переменной состояния системы.

Основные результаты в направлении были получены в Китае [3–5, 11, 13–15, 22, 24, 26], а в 2010-е гг. в России [18–21, 31].

9. Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания «Эволюция окружающей среды и климата вследствие естественных причин и антропогенного воздействия» (FGRW-2021-0015, № госрегистрации 122032300363-3).

Литература

1. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. М. : Мир, 1982. 608 с.
2. Rial J.A. Caustics and focusing produced by sedimentary basins: applications of catastrophe theory to earthquake seismology // *Geophysical Journal International*. 1984. Vol. 79. P. 923–938.
3. Pan Y., Li A. Fold catastrophe model of strike-slip fault earthquake // *Appl. Math. Mech. Engl. Ed.* 2010. Vol. 31 (3). P. 349–362.
4. Pan Y., Zhao Z. Analysis of main shock of thrust fault earthquake by catastrophe theory // *Appl. Math. Mech. Engl. Ed.* 2012. Vol. 33 (7). P. 845–864.
5. Добровольский И.П. Теория подготовки тектонического землетрясения. М., 1991. 224 с.
6. Wald L. The Science of Earthquakes By Earthquake Hazards Program. URL: <https://www.usgs.gov/programs/earthquake-hazards/science-earthquakes> (дата обращения 08.11.2023).
7. Гзовский М.В. Основы тектонофизики. М. : Наука, 1975. 536 с.
8. Добровольский И.П. Математическая теория подготовки и прогноза тектонического землетрясения. М. : Физматлит, 2009. 235 с.
9. Костров Б.В. Механика очага тектонического землетрясения. М. : Наука, 1975. 172 с.
10. Катастрофы и катаклизмы / сост.: Н. Непомнящий, М. Курушин. М. : ОЛМА Медиа Групп, 2010. С. 12–13.
11. Dingwen L., Jingyao W., Yongjuan W. Application of catastrophe theory in earthquake hazard assessment and earthquake prediction research // *Tectonophysics*. 1989. Vol. 767. P. 179–186.
12. Dingwen L., Jingyao W., Yongluan W. Some catastrophe models for non-static tectonic movement and their significance to the study of earthquake generation conditions // *Proc. Chinese Symp. Tectonophys.* 2nd. 1989 (in Chinese).
13. Kang Z.Y. A cusp catastrophe model of interpret loss of stable equilibrium in rock quasi-static movement // *Acta Seismologica Sinica*. 1984. Vol. 6. P. 352–361 (in Chinese).
14. Yin Y.Q., Zheng G.T. A cusp type catastrophic model of fault earthquake // *Acta Geophysica Sinica*. 1988. Vol. 31 (6). P. 657–664 (in Chinese).

15. Yong X.X., Yin Y.Q., Kang Z.Y., Liu G.X., Wang T.W. The cusp type catastrophe analyses of compresso-shear fault earthquake // *Science China Chemistry*. 1994. Vol. 24 (6). P. 656–663 (in Chinese).
16. Физика землетрясений / под ред. М.А. Садовского. М. : Наука, 1975. 214 с.
17. Мячкин В.И., Воевода И.Д. Предположения о статистической теории подготовки землетрясений // *Физика землетрясений*. М. : Наука, 1975. С. 45–57.
18. Арсеньев С.А. Землетрясения с точки зрения теории катастроф // *Триггерные эффекты в геосистемах: материалы IV Всероссийской конференции с международным участием*. М. : ГЕОС, 2017. С. 52–59.
19. Arsen'yev S.A. Sliding friction as mechanism for onset of tectonic earthquakes // *Tectonophysics and actual topics in the Earth's Sciences: Proceed. of the IV All-Russian Conf. Russian Academy of Sciences*. Moscow, 2016. С. 423–429 (in Russian).
20. Arsen'yev A.A., Eppelbaum L.V., Meirova T. Earthquake Processes: A View from Synergetics and the Theory of Catastrophes // *Pure Appl. Geophys.* 2019. Vol. 176. P. 3377–3390.
21. Арсеньев С.А. Возникновение землетрясений в активных разломах // *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук*. 2017. № 4–2. С. 145–158.
22. Yin Y.Q., Du J. A swallow-tail type catastrophic model of earthquake process // *Acta Seismologica Sinica*. 1994. Vol. 7. P. 521–528.
23. Апродов В.А. Зоны землетрясений. М. : Мысль, 2000. 403 с.
24. Yang X.X., Yin Y.Q. Cusp type catastrophe analysis of the earthquake process of compression torsion fault. *China Science // Series Chemical Life Science Geology*, 1994. P. 656–663.
25. Chen Z., Wang W., Li D. Instability Analysis of Strike-Slip Fault Based on Cusp Catastrophe Model // *SDHM*. 2018. Vol. 12, No. 1. P. 19–33.
26. Shi Z., Luo Z., Peng D., He Z. Application of catastrophe theory to the analyses of mechanism of faulting movement // *Journal of Xian Engineering University*. 1996. Vol. 18, No. 1. P. 50–55.
27. Современная трибология. Итоги и перспективы / под ред. К.В. Фролова. М. : Изд-во ЛКИ, 2014. 480 с.
28. Kong D., Hu K. Application of catastrophe theory in surrounding rock stability // *Advanced Materials Research Vols*. 2013. Vol. 712–715. P. 974–978.
29. Li E.P., Yin Y.Q. A simply model for earthquake instability // *Earthquake Research in China*. 2009. Vol. 24, No. 2. P. 179–189.
30. Stuart W.D. Strain-softening instability model for the san fernando earthquake // *Science*. 1979. Vol. 203, No. 4383. P. 907.
31. Гульельми А.В. Форшоки и афтершоки сильных землетрясения в свете теории катастроф // *УФН*. 2015. Т. 185, № 4. С. 415–429.
32. Гуц А.К. Теоретико-катастрофические модели оползневых процессов // *Математические структуры и моделирование*. 2023. № 3 (67). С. 54–70.

TECTONIC EARTHQUAKES AND THEORY OF CATASTROPHES

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Leading Scientist Researcher, e-mail: aguts@mail.ru

Federal Research Centre the Subtropical Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
Sochi, Russia

Abstract. Review article presenting work on application of the mathematical theory of catastrophes to earthquakes. This work is mainly being successfully carried out in China and Russia. Articles were selected that reflected such disasters as “fold”, “cusp”, “swallow tail” and “butterfly”.

Keywords: earthquakes, catastrophe theory, review article .

Дата поступления в редакцию: 08.11.2023