

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМ С БИФУРКАЦИЯМИ АНДРОНОВА-ХОПФА

**Л.А. Володченкова**

к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

**А.К. Гуц**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** Долговременные исследования лесных систем показывают, что помимо стационарных равновесных состояний возможно появление повторяющихся, точнее периодических процессов. В каких условиях они возникают и в каких случаях их можно ожидать? В статье демонстрируются соответствующие математические модели, касающиеся влияния почвы, вредителей и появления альтернативных деревообрабатывающим предприятиям отраслей.

**Ключевые слова:** Лесные экосистемы, математические модели, теория бифуркаций, бифуркация Андронова-Хопфа.

Наличие бифуркации Андронова-Хопфа означает, что при изменении параметров динамической системы, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu) \in \mathbb{R}^n,$$

появляются периодическое равновесие, т.е. переменные системы являются периодическими функциями и, следовательно, имеем замкнутую траекторию.

*Предельным циклом* называется замкнутая периодическая траектория системы дифференциальных уравнений, такая, что [1]:

1) в некоторой окрестности предельного цикла нет других периодических траекторий;

2) все траектории, начинающиеся в этой окрестности, стремятся к циклу при  $t \rightarrow +\infty$  или при  $t \rightarrow -\infty$ .

Для траекторий в окрестности предельного цикла возможны следующие асимптотические свойства:

1) Все траектории в окрестности предельного цикла стремятся к нему при  $t \rightarrow \infty$ . В этом случае цикл называется *устойчивым*.

2) Все траектории в окрестности предельного цикла стремятся к нему при  $t \rightarrow -\infty$  и, соответственно, покидают его окрестность при изменении времени в положительном направлении. В этом случае цикл называется *неустойчивым*.

В статье мы приводим несколько математических моделей лесных экосистем, обладающие бифуркациями Андронова-Хопфа.

## 1. Теорема Андронова-Хопфа

Приведем двумерный вариант [2, с. 157] или [3, с. 59] теоремы, гарантирующей рождение периодических равновесий. Речь идет о системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = f_1(x^1, x^2, \mu) \\ \frac{dx^2}{dt} = f_2(x^1, x^2, \mu). \end{cases} \quad (1)$$

Напомним, что стационарное равновесие  $x = x(\mu)$  определяется условием

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad f(x, \mu) = 0.$$

Если экосистема находится в стационарном равновесии при конкретном значении параметра  $\mu$ , то с течением времени в ней не наблюдаются какие-либо изменения, особенно в том случае, когда это равновесие устойчиво. Если параметр  $\mu$  меняется, и система переходит в неустойчивые равновесия, то возможна бифуркация, т.е. система оказывается в состоянии, из которого она может перейти не одно, а в два равновесных состояния (возможны и три и более альтернатив). Причем невозможно предсказать, в каком именно состоянии она окажется в ближайший момент. Это и есть раздвоение, или бифуркация. Причем возможен переход не в стационарное равновесие, а в такое, в котором переменные системы изменяются по периодическому закону (цикл). Такая ситуация рождения цикла описывается теоремой Андронова-Хопфа.

Выход в периодический режим представляет особый интерес при изучении лесных экосистем.

**Теорема 1.** Пусть  $f_1(0, 0, \mu) = f_2(0, 0, \mu) = 0$  при всех  $\mu$ . Допустим, что матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(0, 0, \mu) & \frac{\partial f_1}{\partial x^2}(0, 0, \mu) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^1}(0, 0, \mu) & \frac{\partial f_2}{\partial x^2}(0, 0, \mu) \end{pmatrix} \quad (2)$$

имеет комплексно-сопряженное собственное число  $\lambda(\mu)$  такое, что  $Re\lambda(\mu) < 0$  при  $\mu < 0$ ,  $Re\lambda(\mu) = 0$  при  $\mu = 0$  и  $Re\lambda(\mu) > 0$  при  $\mu > 0$ . Предположим, что

$$\frac{dRe \lambda(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} > 0.$$

Тогда

1) существуют функция  $\mu = \mu(\varepsilon)$ , зависящая от параметра  $\varepsilon$ ,  $\mu(0) = 0$ , и периодическое равновесие  $C_{\mu(\varepsilon)} : x = \phi(t, \mu(\varepsilon))$  с периодом  $T = 2\pi/|\lambda(\mu(\varepsilon))|$ , радиус которого растет как  $\sqrt{|\mu(\varepsilon)|}$ ;

2) если стационарное равновесие  $0=(0,0)$  – аттрактор<sup>1</sup> при  $\mu = 0$ , то  $\mu(\varepsilon) > 0$  и периодические равновесия являются устойчивыми.

<sup>1</sup>Компактные подмножества, к которым стремятся при  $t \rightarrow \infty$  все траектории динамической системы, начинающиеся в некоторой области (или в объединении областей) фазового пространства, называются аттракторами.

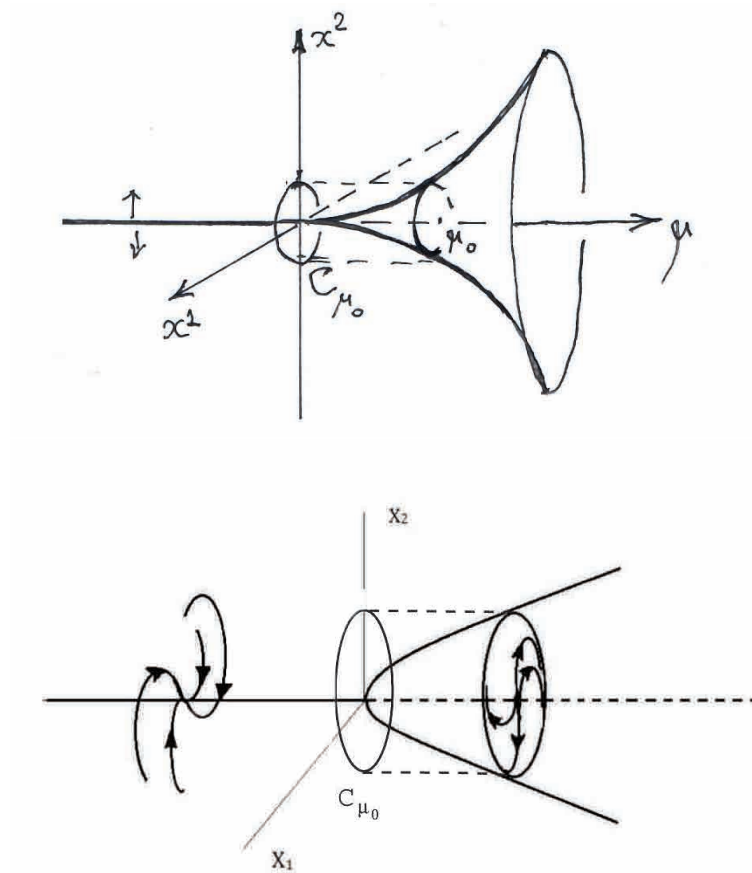


Рис. 1. Рождение периодического равновесия  $C_{\mu_0}$ ,  $\mu_0 > 0$  из при потере устойчивости стационарного равновесия  $x = (0, 0)$ ,  $\mu < 0$  [1]

Имеется следующий трехмерный вариант теоремы Андронова-Хопфа [4].

**Теорема 2.** *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = f_1(x^1, x^2, x^3, \mu) \\ \frac{dx^2}{dt} = f_2(x^1, x^2, x^3, \mu) \\ \frac{dx^3}{dt} = f_3(x^1, x^2, x^3, \mu). \end{cases} \quad (3)$$

$$x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Пусть  $f(x, \mu)$  – достаточно гладкая функция, в окрестности точки  $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , имеется стационарное равновесие  $x(\mu)$ ,  $f(x(\mu), \mu) = 0$ ,  $x_0 = x(\mu_0)$  и якобиан

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x(\mu), \mu) \right)_{i,j=1,2,3}$$

обладает парой комплексно-сопряженных собственных чисел  $\lambda_{1,2}(\mu)$  и действительным собственным числом  $\lambda_3(\mu) < 0$  с

$$\text{Im}\lambda_1(\mu_0) > 0, \quad \text{Re}\lambda_1(\mu_0) = 0, \quad \frac{d\text{Re}\lambda_1}{d\mu}(\mu_0) \neq 0.$$

Тогда у системы (3) существует семейство предельных циклов.

Наконец, приведем многомерный вариант теоремы Андронова-Хопфа [3, с.73].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx^1}{dt} = f_1(x^1, \dots, x^n, \mu) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx^n}{dt} = f_n(x^1, \dots, x^n, \mu), \end{array} \right.$$

Справедлива

**Теорема 3.** Пусть  $f_i(0, \dots, 0, \mu) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) при всех  $\mu$ . Допустим, что матрица

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(0, \dots, 0, \mu) \right)_{i,j=1,\dots,n} \tag{4}$$

имеет комплексно-сопряженное простое собственное число  $\lambda(\mu)$ , а остальные собственные числа отличны от этого.

Пусть  $\text{Re}\lambda(\mu) < 0$  при  $\mu < 0$ ,  $\text{Re}\lambda(\mu) = 0$  при  $\mu = 0$  и  $\text{Re}\lambda(\mu) > 0$  при  $\mu > 0$ . Предположим, что

$$\frac{d\text{Re} \lambda(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} > 0.$$

1) существуют функция  $\mu : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что при  $x_1$  точка  $x_1, 0, \dots, 0, \mu(x_1)$  лежит на замкнутой траектории системы (1.) периода  $\approx 2\pi/|\lambda(\mu(x_1))|$ , причем  $\mu(0) = 0$ ;

2) существует окрестность  $U$  точки  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  такая, что любая замкнутая траектория, лежащая в  $U$ , – это одна из траекторий из 1) при условии, что остаток спектра остается в левой полуплоскости, когда  $\mu$  проходит через нуль.

3) если  $0 = (0, \dots, 0)$  – слабый аттрактор относительно  $\lambda(\mu)$  и координаты выбраны так, что

$$\begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| & \left( \frac{\partial f_1}{\partial x^j}(0, \dots, 0, 0) \right)_{j=3,\dots,n} \\ -|\lambda(0)| & 0 & \left( \frac{\partial f_2}{\partial x^j}(0, \dots, 0, 0) \right)_{j=3,\dots,n} \\ 0 & 0 & \left( \frac{\partial f_a}{\partial x^j}(0, \dots, 0, 0) \right)_{a,j=3,\dots,n} \end{pmatrix},$$

$$\lambda(0) \notin \text{спектр} \left( \frac{\partial f_a}{\partial x^j} (0, \dots, 0, 0) \right)_{a,j=3, \dots, n},$$

то  $\mu(x_1) > 0$  для всех  $x_1$ , замкнутые траектории устойчивы, а радиус такой траектории растет  $\sqrt{\mu}$  при росте  $\mu$ .

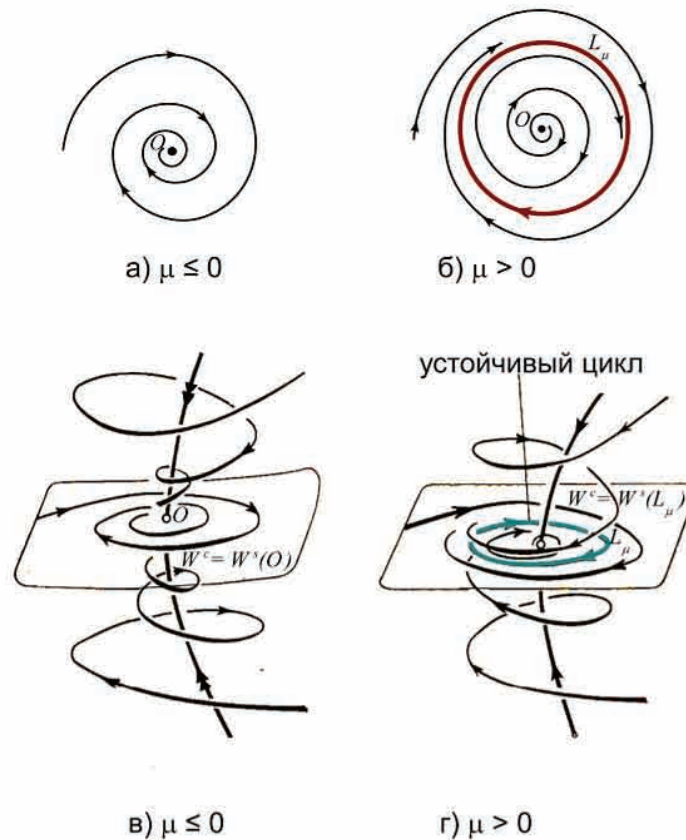


Рис. 2. Устойчивое при  $\mu < 0$  стационарное равновесие теряет устойчивость при  $\mu = 0$  и порождает устойчивое при  $\mu > 0$  периодическое равновесие [5]

## 2. Динамика системы «лес-почва»

Рассмотрим модель, описывающая систему «лес-почва»

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= rB \left( 1 - \frac{B}{k} \right) - \alpha w P, \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma(p - P^2)P + \delta w^2 B, \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $B(t)$  – биомасса леса,  $P(t)$  – мера плодородия почвы,  $p > 0$  – мера типа почвообразующей породы,  $w$  – влажность почвы,  $r, k, \alpha, \gamma, \delta = \text{const}, \alpha\delta > 0$  константы.

Первое уравнение в системе (5) – это подправленное с учетом влияния почвы на лес уравнение для биомассы, приведенное ниже в § 4, а второе уравнение также подправленное уравнения, описывающее динамику почвы с учетом влияния на нее биомассы леса, изученное в статье [6].

Имеем стационарное равновесие  $(B, \Pi) = (0, 0)$ .

Вычисляем матрицу (2) для нашей системы и находим ее собственные значения:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} r - \lambda & -\alpha w \\ \delta w^2 & \gamma p - \lambda \end{vmatrix} = \\ & = \lambda^2 - \lambda[r + \gamma p] + [r\gamma p + \alpha\delta w^3] = 0, \\ & \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (r + \gamma p) \pm \sqrt{(r - \gamma p)^2 - 4\alpha\delta w^3} \right]. \end{aligned}$$

Имеем пару комплексно-сопряженных корней, если

$$(r - \gamma p)^2 < 4\alpha\delta w^3.$$

Допустим, что это неравенство выполнено, тогда

$$Re\lambda = \frac{1}{2}(r + \gamma p).$$

Полагаем  $2\mu = r + \gamma p$  (или, например  $\mu = r, \gamma = \mu/p$ ). Тогда  $Re\lambda(\mu) < 0$  при  $\mu < 0$ ,  $Re\lambda(\mu) = 0$  при  $\mu = 0$  и  $Re\lambda(\mu) > 0$  при  $\mu > 0$ . Наконец,

$$\frac{dRe\lambda}{d\mu} = 1 > 0.$$

Следовательно, выполнены условия теоремы 1 и поэтому в изучаемой системе «лес-почва» возможно установление автоколебания. Хотя, видимо, приходится говорить о катастрофических автоколебаниях, связанных с грандионными изменениями климата или с ураганами.

### 2.1. Компьютерное моделирование

Проведем компьютерный эксперимент с системой (5). Имеем программу в Maple:

```
>with(DEtools):
>DEplot([diff(B(t),t) = 1 * B(t) * (1 - B(t)) - P(t),
diff(P(t),t) = 1 * P(t)(19 - (P(t))^2) * P(t) + 100 * B(t)], [B(t), P(t)],
t = 0..1000, B = -0.10..0.10, P = -1..1, arrows = LARGE,
color = [1 * P(t) * (19 - (P(t))^2) * P(t) + 100 * B(t),
1 * B(t) * (1 - (B(t))^2) - P(t), .1]);
```

Получим картину изоклин, данную на рис. 3

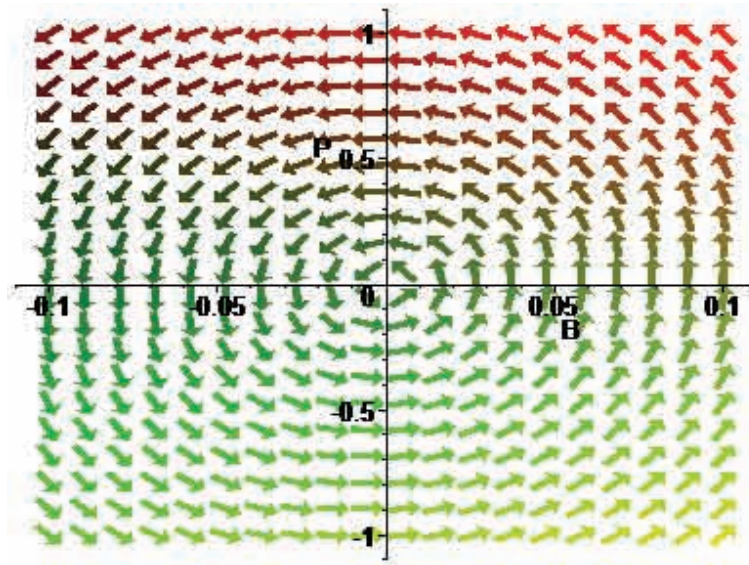


Рис. 3. Векторное поле системы (5), которое указывает на предельные циклы

На рис. 3 мы четко видим предельные циклы вокруг точки  $(B, P) = (0, 0)$ , являющуюся стационарным равновесием. Однако биомасса и мера плодородия почвы – положительные величины, и, следовательно, нужно брать ненулевые значения для координат равновесия. Но в действительности вместо уравнения (5) можно рассматривать систему

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= r(B - B_0) \left( 1 - \frac{(B - B_0)}{k} \right) - \alpha w(P - P_0), \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma[p - (P - P_0)^2](P - P_0) + \delta w^2(B - B_0), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $B_0, P_0 > 0$  – истинные реальные величины, отвечающие стационарному равновесию  $(B_0, P_0)$  рассматриваемой системы «лес-почва», вокруг которого и рождаются предельные циклы. Иначе говоря, нет сомнения в появлении автоколебаний в системе «лес-почва».

### 3. Динамика взаимодействия «лес-вредитель»

В работе [7] предложены две простейшие математические модели разновозрастного леса, пораженного насекомыми-вредителями.

Учтены две ситуации:

- (1) вредитель питается только молодыми деревьями;
- (2) вредитель питается только старыми деревья. Значения параметров этой модели оценены для случая бальзамического пихтового леса и восточного елового почкового червя.

Показано, что вторжение небольшого количества вредителей в устойчивую лесную экосистему может привести к интенсивному колебанию ее возрастной

структуры. Возможные последствия экологических изменений в также рассматриваются лесные экосистемы.

Пусть  $x$  и  $y$  – плотность молодых и старых деревьев,  $\rho$  – плодовитость вида, а  $h$  – смертность и старение и функция  $\gamma(y)$  представляет зависимость смертности «молодых» деревьев от густоты «старых» деревьев.

Следуя Антоновскому и Корзухину [8], мы предполагаем, что существует некоторое оптимальное значение плотности «старых» деревьев, при котором развитие «молодых» деревьев идет наиболее успешно. В этом случае можно выбрать  $\gamma(y) = a(y - b)^2 + c$  (рис. 1)

Предположим, что в отсутствие пищи плотность вредителей экспоненциально снижается и что взаимодействия лес-насекомое можно описать билинейными терминами.

Таким образом, для случая, когда вредитель питается подлеском, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho y - \gamma(y)x - fx - Axz, \\ \dot{y} &= fx - hy, \\ \dot{z} &= -\epsilon z + Bxz, \end{aligned} \tag{7}$$

а для случая, когда вредитель питается взрослыми деревьями, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho y - \gamma(y)x - fx, \\ \dot{y} &= fx - hy - Ayz, \\ \dot{z} &= -\epsilon z + Byz. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь  $z$  – плотность насекомых,  $\epsilon$  – уровень смертности насекомых, а члены  $xz$  и  $yz$  представляют взаимодействие насекомое-лес.

### 3.1. Бифуркация Андронова-Хопфа в модели (7)

Путем линейной замены переменных, параметров и времени система (7) можно преобразовать в форму

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho y - (y - 1)^2 x - sx - xz, \\ \dot{y} &= x - hy, \\ \dot{z} &= -\epsilon z + Bxz. \end{aligned} \tag{9}$$

Новые параметры получены подстановками

$$\frac{f\rho}{a^2b^4} \rightarrow \rho, \quad \frac{f+c}{ab^2} \rightarrow s, \quad \frac{h}{ab^2} \rightarrow h, \quad \frac{\epsilon}{ab^2} \rightarrow \epsilon, \quad \frac{B}{ab} \rightarrow B.$$

Напомним, что стационарные равновесия – это те, для которых

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0.$$

Система (9) может иметь от одного до четырех состояний равновесия. Начало координат,  $E_0 = (0, 0, 0)$ , всегда есть точка стационарного равновесия.



Два положения равновесия  $E_1 = (x_1, y_1, 0)$  и  $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ , где

$$y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{\rho - sh}{h}}, \quad x_{1,2} = hy_{1,2},$$

появляются в системе (9) на линии  $D_1 = \{(p, h) : p = sh\}$ .

Помимо стационарных равновесий  $E_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ , система (9) могла бы иметь дополнительное равновесие

$$E_3 = \left( \frac{\epsilon}{B}, \frac{\epsilon}{Bh}, \frac{\rho - sh}{h} - \left( \frac{\epsilon}{Bh} - 1 \right)^2 \right).$$

Это равновесие появляется в  $R_+^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0\}$  для значений параметров  $(\rho, h)$ , попадающих вправо от линии

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ (\rho, h) : \frac{\rho - sh}{h} - \left( \frac{\epsilon}{Bh} - 1 \right)^2 = 0 \right\}$$

в параметрической плоскости (см. рис. 1).

Помимо этих раздвоений равновесий, в системе (9) могут «возникать» и «исчезать» автоколебания (т.е. устойчивые колебания). Эти события происходят на линиях R и P на плоскости параметров, в то время как автоколебания существуют в областях 5 и 6 (см. рис. 1).

Равновесие  $E_3$  теряет устойчивость на линии прямой R в плоскости параметров  $(\rho, h)$  (см. рис. 1) (из-за перехода двух комплексно-сопряженных собственных значений из левой половины комплексной плоскости в правую). Это изменение устойчивости приводит к *бифуркации Андронова-Хопфа*, т. е. к появлению устойчивого предельного цикла в системе (9). Иначе говоря, к *появлению периодического равновесия* (автоколебания) (см. рис. 3).

Также есть линия P на  $(p, h)$ -плоскости, соответствующая разрушению предельных циклов. По мере приближения системы к линии P в пространстве параметров период предельного цикла увеличивается до бесконечности, а при критическом значении параметра предельный цикл сливается с сепаратрисным циклом и исчезает.

Итак, если вредители питаются только молодыми деревьями, то возможно возникновение периодических режимов в функционировании лесной экосистемы.

Посмотрим, что происходит в случае, когда вредители питаются только старыми деревьями.

### 3.2. Бифуркации в модели (8)

Модель (8), которая представляет собой вредителя, поражающего исключительно старые деревья, можно преобразовать путем масштабирования в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho y - (y - 1)^2 x - sx, \\ \dot{y} &= x - hy - yz, \\ \dot{z} &= -\epsilon z + Byz. \end{aligned} \tag{10}$$

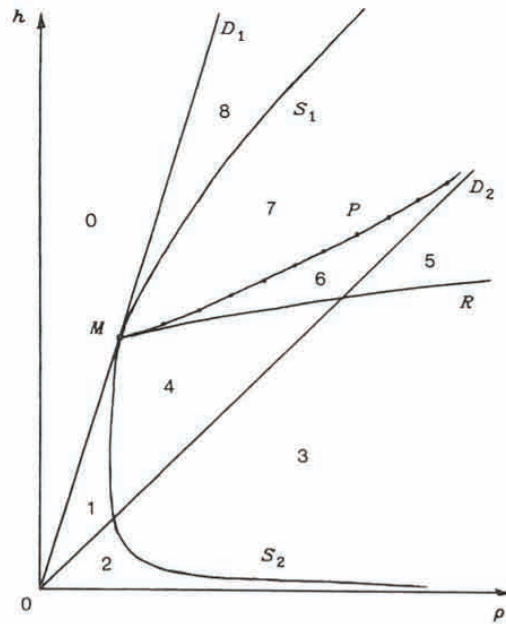


Рис. 4. Плоскость  $(\rho, h)$  и бифуркационные линии  $S_1, S_2, D_1, D_2, R$  и  $P$ , пересечение которых ведет к бифуркациям, т.е. либо к раздвоением стационарных равновесий, либо к появлению периодических равновесий [7]

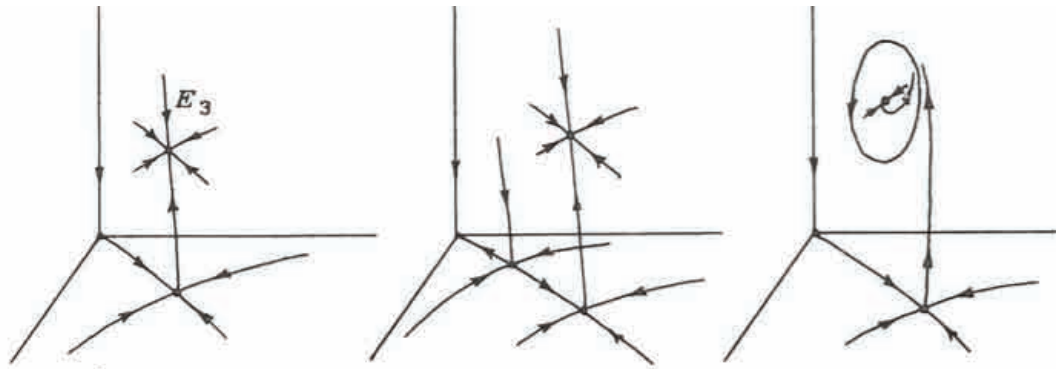


Рис. 5. Рождение периодического равновесия из стационарного равновесия  $E_3$  при пересечении линии  $R$  [7]

где смысл переменных и параметров такой же, как в системе (8).

Система (10) может иметь от одной до четырех точек равновесия в первом октанте  $R_+^3$ :  $E_0 = (0, 0, 0)$ ,  $E_1 = (x_1, y_1, 0)$ ,  $E_2 = (x_2, y_2, 0)$  и  $E_3 = (x_3, t_3, z_3)$ . Равновесия  $E_1$  и  $E_2$  на плоскости  $z = 0$  имеют те же координаты, что и в системе (3); они также раздваиваются таким же образом на прямых  $D_1$  и  $D_2$ . Как и в системе (9) в системе (10) в  $R_+^3$  существует точка равновесия

$$E_3 = \left( \frac{\rho \epsilon B}{(\epsilon - B)^2 + sB^2}, \frac{\epsilon}{B}, \frac{\rho B^2}{(\epsilon - B)^2 + sB^2} - h \right).$$

Это равновесие появляется в  $R_+^3$  ниже линии

$$S = \left\{ (p, h) : \frac{\rho B^2}{(\epsilon - B)^2 + sB^2} - h = 0 \right\}.$$

Но стационарное равновесие  $E_3$  не теряет устойчивости, поэтому автоколебания в системе (10) *невозможны!* Получается, что в случае, когда вредители питаются только старыми деревьями, не следует ожидать идентичных повторов в динамике леса.

#### 4. Конкуренция лесообрабатывающей промышленности и синтетической промышленности

Рассмотрим модель, в которой конкурируют две отрасли промышленности: использующей то, что дают леса (древесину) и ту, что никак не связана с лесным сырьем – синтетическую промышленность [9].

Плотность биомассы растет с точки зрения логистики, а скорость ее роста снижается за счет лесной промышленности. Синтетические отрасли промышленности растут с постоянной скоростью.

В рассматриваемой статье определяются критерии бифуркации Андронова-Хопфа, используя естественную скорость истощения древесных производств  $a_3$  в качестве параметра бифуркации.

Пусть  $B(t)$  – плотность в любой момент времени  $t$  лесной биомассы,  $W(t)$  – деревообрабатывающей промышленности и  $S(t)$  – синтетической промышленности.

Мы хотим сохранить лес, используя альтернативные древесные отрасли промышленности. Истощение лесов происходит в основном по вине деревообрабатывающей промышленности, населения и загрязнения.

Введем следующие коэффициенты:

- Предполагаем, что лес растет с точки зрения логистики в отсутствие деревообрабатывающих производств с внутренним темпом роста  $r$  и ограничивающей рост величиной  $k$ .

- Величины  $c_1, c_2$  показывают влияние  $S(t)$  на  $W(t)$  и  $W(t)$  на  $S(t)$  соответственно. Кроме того, мы предполагаем, что деревообрабатывающая промышленность полностью зависит от лесной биомассы, а синтетическая – нет. Мы также считаем, что синтетические отрасли промышленности получают достаточное количество синтетического материала с постоянной скоростью  $Q$ .

- Скорость истощения лесной биомассы равна  $\alpha$ , а  $\alpha_1$  – скорость роста деревообрабатывающей промышленности. при наличии лесной биомассы.

- Наконец,  $h_1$  и  $h_2$  – это естественные темпы истощения лесной и синтетической промышленности соответственно.

Модель формулируется с помощью следующей системы нелинейных диффе-

ренциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= rB\left(1 - \frac{B}{k}\right) - \alpha BW, \\ \frac{dW}{dt} &= \alpha_1 BW - c_1 WS - h_1 W, \\ \frac{dS}{dt} &= Q - c_2 WS - h_2 S, \end{aligned} \tag{11}$$

$$B(0) > 0, \quad W(0) > 0, \quad S(0) > 0.$$

Система (11) посредством подстановок

$$x = \frac{B}{k}, \quad y = \frac{W}{k}, \quad z = \frac{S}{k}$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - x) - axy, \\ \frac{dy}{dt} &= a_1 xy - a_2 yz - a_3 y, \\ \frac{dz}{dt} &= Q_0 - a_4 yz - a_5 z, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$a = \frac{\alpha k}{r}; \quad a_1 = \frac{\alpha_1 k}{r}; \quad a_2 = \frac{c_1 k}{r}; \quad a_3 = \frac{h_1}{r}; \quad a_4 = \frac{c_2 k}{r}; \quad a_5 = \frac{h_2}{r}, \quad Q_0 = \frac{q}{rk},$$

$$x(0) > 0, \quad y(0) > 0, \quad z(0) > 0.$$

#### 4.1. Стационарные равновесия

Система (12) имеет четыре стационарных равновесия:

$$E_1 = \left(1, 0, \frac{Q_0}{a_5}\right), \quad E_2 = \left(0, 0, \frac{Q_0}{a_5}\right), \quad E^{*i} = (x^*, y^*, z^*), \quad (i = 1, 2),$$

где  $y^*$  – корень квадратного уравнения

$$aa_1 a_4 y^{*2} + (a_3 a_4 - a_1 a_4 + aa_1 a_5) y^* + (a_3 a_4 - a_1 a_4 + aa_1 a_5) = 0. \tag{13}$$

Это уравнение имеет два положительных корня, если

$$a_3 a_4 - a_1 a_4 + aa_1 a_5 < 0 \quad \text{и} \quad a_3 a_4 - a_1 a_4 + aa_1 a_5 > 0$$

и имеет один положительный корень при

$$a_3 a_4 - a_1 a_4 + aa_1 a_5 < 0 \quad \text{и} \quad a_3 a_4 - a_1 a_4 + aa_1 a_5 < 0,$$

где

$$x^* = \frac{a_2 Q_0 + a_3 a_4 y^* + a_3 a_5}{a_1 a_4 y^* + a_1 a_5},$$

$$z^* = \frac{Q_0}{a_1 y^* + a_5},$$

$$y_1^* = \frac{-a_3 a_4 + a_1(a_4 - a a_5) \pm \sqrt{((a_1 - a_3)a_4 + a a_1 a_5)^2 - 4a a_1 a_2 a_4 Q_0}}{2a a_1 a_4}.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} E^{*1} &= \\ &= \left( \frac{(a_1 + a_3)a_4 + a a_1 a_5 - \sqrt{(a_3 a_4 - a_1(a_4 + a a_5))^2 - 4a a_1 a_2 a_4 Q_0}}{2a_1 a_4}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-a_3 a_4 + a_1(a_4 - a a_5) + \sqrt{((a_1 - a_3)a_4 + a a_1 a_5)^2 - 4a a_1 a_2 a_4 Q_0}}{2a a_1 a_4}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-a_3 a_4 + a_1(a_4 - a a_5) + \sqrt{((a_1 - a_3)a_4 + a a_1 a_5)^2 - 4a a_1 a_2 a_4 Q_0}}{2a a_1 a_4} \right) \\ E^{*2} &= \\ &= \left( \frac{(a_1 + a_3)a_4 + a a_1 a_5 - \sqrt{(a_3 a_4 - a_1(a_4 + a a_5))^2 - 4a a_1 a_2 a_4 Q_0}}{2a_1 a_4}, \right. \\ &= \left. \frac{(-a_1 + a_3)a_4 - a a_1 a_5 + \sqrt{(a_3 a_4 - a_1(a_4 + a a_5))^2 - 4a a_1 a_2 a_4 Q_0}}{2a a_1 a_4}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-a_3 a_4 - a_1(a_4 - a a_5) + \sqrt{((a_1 - a_3)a_4 + a a_1 a_5)^2 - 4a a_1 a_2 a_4 Q_0}}{2a a_1 a_4} \right). \end{aligned}$$

#### 4.2. Наличие бифуркации Андронова-Хопфа

Установлено существование стационарных равновесий:  $E_1(1, 0, \frac{Q_0}{a_5})$ ,  $E_2(0, 0, \frac{Q_0}{a_5})$  и  $E^{*i}(B^*, W^*, S^*)$ .

Теперь мы исследуем возможность бифуркации Хопфа указанной выше системы (12), взяв  $a_3$  (то есть скорость естественного истощения) в качестве параметра бифуркации  $\mu$ .

Положим

$$\begin{aligned} b_1 &= x^* + \frac{Q_0}{z^*}, \quad b_2 = a a_1 x^* y^* + \frac{Q_0 x^*}{z^*} - a_2 a_4 y^* z^*, \\ b_3 &= \frac{a a_1 Q_0 x^* y^*}{z^*} - a_2 a_4 x^* y^* z^*. \end{aligned}$$

Необходимыми и достаточными условиями существования бифуркации Хопфа являются, если существует  $\mu_0 = (a_3)_0$  такое, что

- 1)  $b_i(\mu_0) > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ );
- 2)  $b_1(\mu_0)b_2(\mu_0) - b_3(\mu_0) = 0$ , т. е.

$$\begin{aligned} &-a_2 a_4 Q_0 y^* + \mu_0 a_1 y^* (1 - \mu_0 y^*)^2 + (1 - \mu_0 y^*)^2 \times \\ &\quad \times (a_4 y^* + a_5) + (1 - \mu_0 y^*) (a_4 y^* + a_5)^2 = 0; \end{aligned}$$

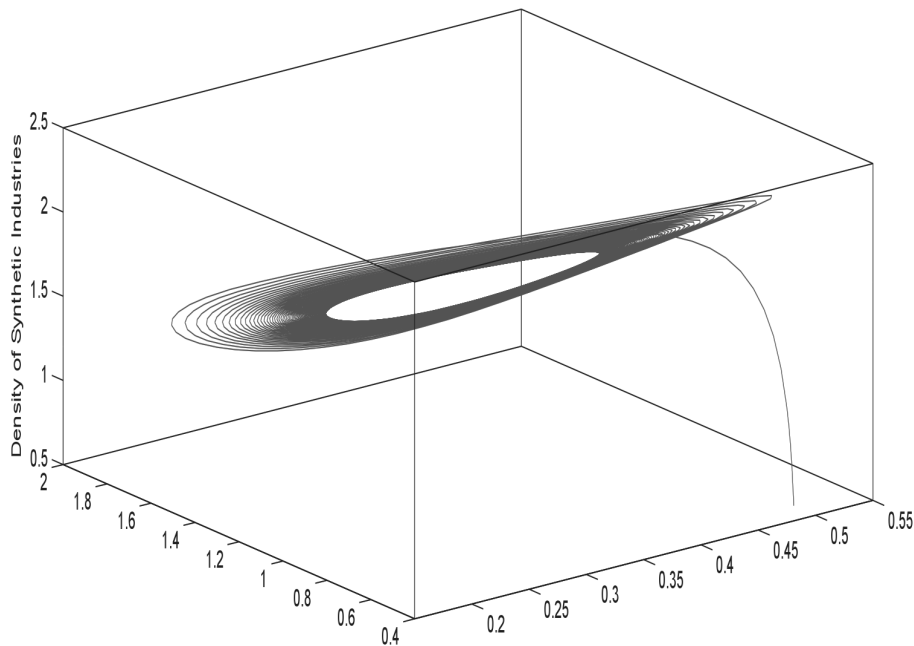


Рис. 6. Рождение периодического равновесия из стационарного равновесия  $E^*$  при  $\mu = \mu_0 = (a_3)_0$  [9]

3) если мы рассмотрим собственные значения характеристического уравнения

$$P(\lambda) = \lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

вида  $\lambda_i = u_i + iv_i$ , то

$$\frac{d}{d\mu}(u_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Находим, что  $u(\mu_0) = 0$  и

$$8u^3 + 8b_1u^2 + 2(b_1^2 + b_2)u + b_1b_2 - b_3 = 0.$$

Дифференцируя это уравнение по  $\mu = a_3$ , получаем

$$\frac{d}{d\mu}(u) = \frac{-\frac{d}{d\mu}(b_1b_2 - b_3)}{2b_1^2 + b_2} \neq 0.$$

То есть удовлетворяются условия теорем Андронова-Хопфа. Следовательно, из  $E^*$  рождаются автоколебания в результате бифуркации Андронова-Хопфа. (рис. 6).

Авторы, представляемой здесь работы, обнаружили также, что когда естественная скорость истощения  $\mu = a_3$  превышает свое пороговое значение, система становится стабильной, в то время как ниже порогового значения система колеблется вокруг внутреннего равновесия  $E^*$ .

## 5. Заключение

Известны многие циклические, повторяемые, периодические явления, фиксируемые при изучении лесных экосистем. «При циклических изменениях лесной биогеоценоз через определенное время вновь возвращается в состояние, весьма близкое к первоначальному, после прекращения действия факторов, вызвавших данные изменения. В зависимости от продолжительности выделяют суточные, сезонные и погодичные циклические изменения» [11]. Очевидно, что важно иметь математические модели лесных экосистем, отражающие перечисленные природные периодические процессы. Но желательно иметь также модели, в которых можно наблюдать и другие устойчивые циклические процессы, причем модель должна описывать экосистему как до того, как появляются циклы, так и сам момент и условия их зарождения. Мы представили три подобные модели, но их число на сегодняшний день гораздо больше.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фомичев А.В. Элементы теории бифуркаций и динамических систем. Часть 1. М.: МФТИ, 2019. – 42 с.
2. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. М.: Мир, 1982.
3. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
4. Vo Sang. Hopf bifurcation formulae and applications to the Genesis-Tesi system // J. Nonlinear Funct. Anal. 2019 (2019), Article ID 34. URL: <http://jnfa.mathres.org/issues/JNFA201934.pdf>
5. Болотов М.И., Гонченко С.В., Гонченко А.С., Гринес Е.А., Казаков А.О., Леванова Т.А., Лукьянов В.И. Бифуркация Андронова-Хопфа для потоков и отображений. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 73 с.
6. Володченкова Л.А. Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка» // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск: изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.
7. M. Ya. Antonovsky, R.A. Fleming, Yu.A. Kuznetsov, W.C. Clark Forest-Pest Interaction Dynamics: The Simplest Mathematical Models // Theoretical Population Biology. 1990. Vol. 37, No. 2. P. 343–367.
8. Antonovsky, M. YA., Korzukhin, M. D. Mathematical modelling of economic and ecological-economic processes / In "Integrated Global Monitoring of Environmental Pollution, Proc. 2nd International Symp., Tbilisi, USSR, 1981, P. 353–358, Gidromet, Leningrad.
9. Manisha Chaudhary M., Dhar J., SahM G.P. Mathematical Model of Depletion of Forestry Resource: Effect of Synthetic Based Industries // World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Biological Sciences. 2013. Vol.7, No:4. P. 798–802.
10. Nazmul Hasan, Sharif Uddin, Haider Ali Biswas. Optimal control applied to sustainable forest management of ecosystem // Differential Equations and Dynamical Systems (to be published).

11. Кищенко И.Т. Лесоведение и лесная экология. Динамика лесных биогеоценозов. М. Издательство Юрайт, 2020. 392 с.

## MATHEMATICAL MODELS OF FORESTRY ECOSYSTEMS WITH THE ANDRONOV-HOPF'S BIFURCATIONS

**L.A. Volodchenkova**

Ph.D. (Biology), Asso professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

**A.K. Guts**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

**Abstract.** Long-term studies of forest ecosystems show that in addition to stationary equilibrium states the periodic processes can appear. In what conditions do they arise? In the article we demonstrate corresponding mathematic models

**Keywords:** Forest ecosystems, mathematical models, bifurcation, Andronov-Hopf's bifurcation theory.

## REFERENCES

1. Fomichev A.V. Elementy teorii bifurkatsii i dinamicheskikh sistem. Chast' 1. Moscow, MFTI Publ., 2019, 42 p. (in Russian)
2. Kasti Dzh. Bol'shie sistemy. Svyaznost', slozhnost' i katastrofy. Moscow, Mir Publ., 1982. (in Russian)
3. Marsden Dzh. and Mak-Kraken M. Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya. Moscow, Mir Publ., 1980. (in Russian)
4. Bo Sang. Hopf bifurcation formulae and applications to the Genesio-Tesi system. J. Nonlinear Funct. Anal., 2019, Article ID 34. URL: <http://jnfa.mathres.org/issues/JNFA201934.pdf> (30.08.2021).
5. Bolotov M.I., Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Grines E.A., Kazakov A.O., Levanova T.A., and Luk'yanov V.I. Bifurkatsiya Andronova–Khopfa dlya potokov i otobrazhenii. Nizhnii Novgorod, Nizhegorodskii gosuniversitet Publ., 2017, 73 p. (in Russian)
6. Volodchenkova L.A. Model' plodorodiya pochvy s točki zreniya katastrofy "sborka". Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie: sbornik materialov Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii (Omsk, 21 noyabrya 2014 g.), Omsk, izd-vo Om. gos. un-ta, 2014, pp. 25–26. (in Russian)
7. Antonovsky M.Ya., Fleming R.A., Kuznetsov Yu.A., and Clark W.C. Forest-Pest Interaction Dynamics: The Simplest Mathematical Models. Theoretical Population Biology, 1990, vol. 37, no. 2, pp. 343–367.
8. Antonovsky M.YA. and Korzukhin M.D. Mathematical modelling of economic and ecological-economic processes. In Integrated Global Monitoring of Environmental Pollution, Proc. 2nd International Symp., Tbilisi, USSR, 1981, P. 353–358, Gidromet, Leningrad.



9. Chaudhary M.M., Dhar J., and SahM G.P. Mathematical Model of Depletion of Forestry Resource: Effect of Synthetic Based Industries. World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Biological Sciences, 2013, vol.7, no. 4, pp. 798–802.
10. Hasan N., Uddin S., and Biswas H.A. Optimal control applied to sustainable forest management of ecosystem. Differential Equations and Dynamical Systems (to be published).
11. Kishchenko I.T. Lesovedenie i lesnaya ekologiya. Dinamika lesnykh biogeotsenozov. Moscow, Izdatel'stvo Yurait, 2020, 392 p. (in Russian) (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 01.09.2021*