

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМ С БИФУРКАЦИЯМИ АНДРОНОВА–ХОПФА

Л.А. Володченкова

к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Долговременные исследования лесных систем показывают, что помимо стационарных равновесных состояний возможно появление повторяющихся, точнее периодических процессов. В каких условиях они возникают и в каких случаях их можно ожидать? В статье демонстрируются соответствующие математические модели, касающиеся влияния почвы, вредителей и появления альтернативных деревообрабатывающим предприятиям отраслей.

Ключевые слова: Лесные экосистемы, математические модели, теория бифуркаций, бифуркация Андронова–Хопфа.

Наличие бифуркации Андронова–Хопфа означает, что при изменении параметров динамической системы, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu) \in \mathbb{R}^n,$$

появляется периодическое равновесие, т. е. переменные системы являются периодическими функциями и, следовательно, имеем замкнутую траекторию.

Предельным циклом называется замкнутая периодическая траектория системы дифференциальных уравнений такая, что [1]:

1) в некоторой окрестности предельного цикла нет других периодических траекторий;

2) все траектории, начинающиеся в этой окрестности, стремятся к циклу при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$.

Для траекторий в окрестности предельного цикла возможны следующие асимптотические свойства:

1) все траектории в окрестности предельного цикла стремятся к нему при $t \rightarrow \infty$. В этом случае цикл называется *устойчивым*;

2) все траектории в окрестности предельного цикла стремятся к нему при $t \rightarrow -\infty$ и, соответственно, покидают его окрестность при изменении времени в положительном направлении. В этом случае цикл называется *неустойчивым*.

В статье мы приводим несколько математических моделей лесных экосистем, обладающие бифуркациями Андронова–Хопфа.

1. Теорема Андронова–Хопфа

Приведём двумерный вариант [2, с. 157] или [3, с. 59] теоремы, гарантирующей рождение периодических равновесий. Речь идёт о системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = f_1(x^1, x^2, \mu) \\ \frac{dx^2}{dt} = f_2(x^1, x^2, \mu). \end{cases} \quad (1)$$

Напомним, что стационарное равновесие $x = x(\mu)$ определяется условием

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad f(x, \mu) = 0.$$

Если экосистема находится в стационарном равновесии при конкретном значении параметра μ , то с течением времени в ней не наблюдаются какие-либо изменения, особенно в том случае, когда это равновесие устойчиво. Если параметр μ меняется и система переходит в неустойчивые равновесия, то возможна бифуркация, т. е. система оказывается в состоянии, из которого она может перейти не в одно, а в два равновесных состояния (возможны и три, и более альтернатив). Причём невозможно предсказать, в каком именно состоянии она окажется в ближайший момент. Это и есть раздвоение, или бифуркация. Причём возможен переход не в стационарное равновесие, а в такое, в котором переменные системы изменяются по периодическому закону (цикл). Такая ситуация рождения цикла описывается теоремой Андронова–Хопфа.

Выход в периодический режим представляет особый интерес при изучении лесных экосистем.

Теорема 1. Пусть $f_1(0, 0, \mu) = f_2(0, 0, \mu) = 0$ при всех μ . Допустим, что матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(0, 0, \mu) & \frac{\partial f_1}{\partial x^2}(0, 0, \mu) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^1}(0, 0, \mu) & \frac{\partial f_2}{\partial x^2}(0, 0, \mu) \end{pmatrix} \quad (2)$$

имеет комплексно сопряжённое собственное число $\lambda(\mu)$ такое, что $Re\lambda(\mu) < 0$ при $\mu < 0$, $Re\lambda(\mu) = 0$ при $\mu = 0$ и $Re\lambda(\mu) > 0$ при $\mu > 0$. Предположим, что

$$\left. \frac{dRe \lambda(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=0} > 0.$$

Тогда:

1) существуют функция $\mu = \mu(\varepsilon)$, зависящая от параметра ε , $\mu(0) = 0$, и периодическое равновесие $C_{\mu(\varepsilon)} : x = \phi(t, \mu(\varepsilon))$ с периодом $T = 2\pi/|\lambda(\mu(\varepsilon))|$, радиус которого растёт как $\sqrt{|\mu(\varepsilon)|}$;

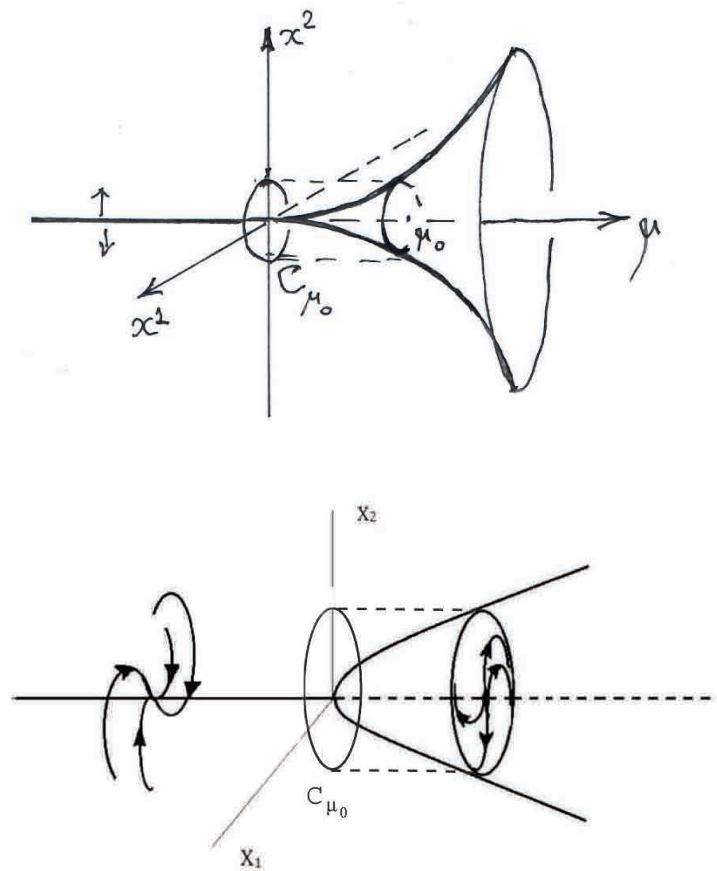


Рис. 1. Рождение периодического равновесия C_{μ_0} , $\mu_0 > 0$ при потере устойчивости стационарного равновесия $x = (0, 0)$, $\mu < 0$ [1]

2) если стационарное равновесие $0=(0,0)$ — аттрактор¹ при $\mu = 0$, то $\mu(\varepsilon) > 0$, и периодические равновесия являются устойчивыми.

Имеется следующий трёхмерный вариант теоремы Андронова–Хопфа [4].

Теорема 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = f_1(x^1, x^2, x^3, \mu) \\ \frac{dx^2}{dt} = f_2(x^1, x^2, x^3, \mu) \\ \frac{dx^3}{dt} = f_3(x^1, x^2, x^3, \mu). \end{cases} \quad (3)$$

¹Компактные подмножества, к которым стремятся при $t \rightarrow \infty$ все траектории динамической системы, начинающиеся в некоторой области (или в объединении областей) фазового пространства, называются *аттракторами*.

$$x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Пусть $f(x, \mu)$ — достаточно гладкая функция, в окрестности точки $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, имеется стационарное равновесие $x(\mu)$, $f(x(\mu), \mu) = 0$, $x_0 = x(\mu_0)$ и якобиан

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x(\mu), \mu) \right)_{i,j=1,2,3}$$

обладает парой комплексно сопряжённых собственных чисел $\lambda_{1,2}(\mu)$ и действительным собственным числом $\lambda_3(\mu) < 0$ с

$$\text{Im} \lambda_1(\mu_0) > 0, \quad \text{Re} \lambda_1(\mu_0) = 0, \quad \frac{d\text{Re} \lambda_1}{d\mu}(\mu_0) \neq 0.$$

Тогда у системы (3) существует семейство предельных циклов.

Наконец, приведём многомерный вариант теоремы Андронова–Хопфа [3, с. 73].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = f_1(x^1, \dots, x^n, \mu) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx^n}{dt} = f_n(x^1, \dots, x^n, \mu), \end{cases}$$

Справедлива

Теорема 3. Пусть $f_i(0, \dots, 0, \mu) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) при всех μ . Допустим, что матрица

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(0, \dots, 0, \mu) \right)_{i,j=1,\dots,n} \quad (4)$$

имеет комплексно сопряжённое простое собственное число $\lambda(\mu)$, а остальные собственные числа отличны от этого.

Пусть $\text{Re} \lambda(\mu) < 0$ при $\mu < 0$, $\text{Re} \lambda(\mu) = 0$ при $\mu = 0$ и $\text{Re} \lambda(\mu) > 0$ при $\mu > 0$. Предположим, что

$$\frac{d\text{Re} \lambda(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} > 0.$$

1) Существуют функция $\mu : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что при x_1 точка $x_1, 0, \dots, 0, \mu(x_1)$ лежит на замкнутой траектории системы (1.) периода $\approx 2\pi/|\lambda(\mu(x_1))|$, причём $\mu(0) = 0$.

2) Существует окрестность U точки $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ такая, что любая замкнутая траектория, лежащая в U , — это одна из траекторий из 1) при условии, что остаток спектра остаётся в левой полуплоскости, когда μ проходит через нуль.

3) Если $0 = (0, \dots, 0)$ — слабый аттрактор относительно $\lambda(\mu)$ и координаты выбраны так, что

$$\begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^j}(0, \dots, 0, 0) \right)_{j=3, \dots, n} \\ -|\lambda(0)| & 0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^j}(0, \dots, 0, 0) \right)_{j=3, \dots, n} \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial f_a}{\partial x^j}(0, \dots, 0, 0) \right)_{a, j=3, \dots, n} \end{pmatrix},$$

$$\lambda(0) \notin \text{спектр} \left(\frac{\partial f_a}{\partial x^j}(0, \dots, 0, 0) \right)_{a, j=3, \dots, n},$$

то $\mu(x_1) > 0$ для всех x_1 , замкнутые траектории устойчивы, а радиус такой траектории растёт $\sqrt{\mu}$ при росте μ .

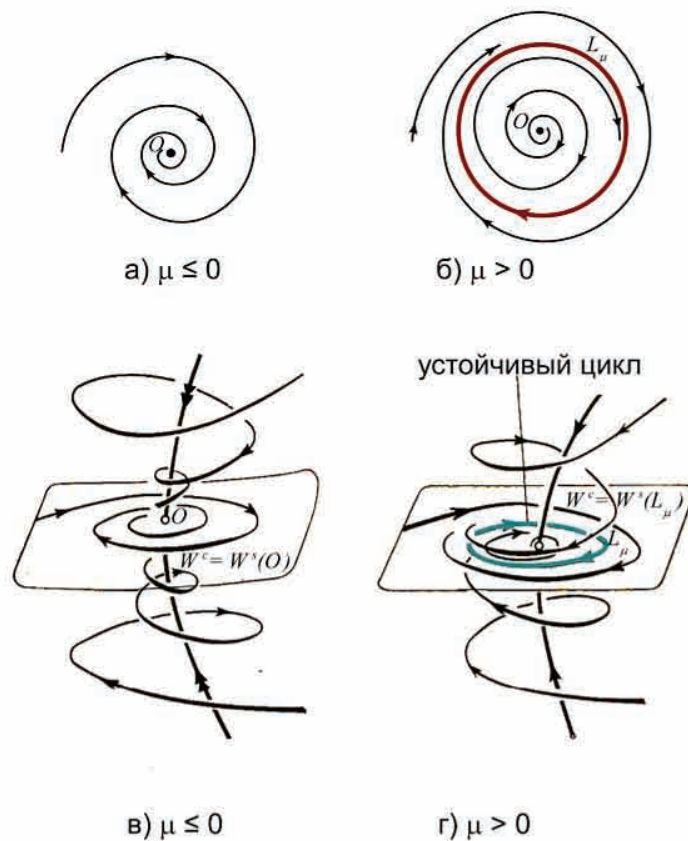


Рис. 2. Устойчивое при $\mu < 0$ стационарное равновесие теряет устойчивость при $\mu = 0$ и порождает устойчивое при $\mu > 0$ периодическое равновесие [5]

2. Динамика системы «лес–почва»

Рассмотрим модель, описывающую систему «лес–почва»

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= rB \left(1 - \frac{B}{k}\right) - \alpha w P, \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma(p - P^2)P + \delta w^2 B. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $B(t)$ — биомасса леса, $P(t)$ — мера плодородия почвы, p — мера типа почвообразующей породы, w — влажность почвы, $r, k, \alpha, \gamma, \delta > 0$ константы.

Первое уравнение в системе (5) — это подправленное с учётом влияния почвы на лес уравнение для биомассы, приведённое ниже в § 4, а второе уравнение также подправленное уравнение, описывающее динамику почвы с учётом влияния на неё биомассы леса, изученное в статье [6].

Имеем стационарное равновесие $(B, P) = (0, 0)$.

Вычисляем матрицу (2) для нашей системы и находим её собственные значения:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} r - \lambda & -\alpha w \\ \delta w^2 & \gamma p - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 - \lambda[r + \gamma p] + [r\gamma p + \alpha\delta w^3] = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(r + \gamma p) \pm \sqrt{(r - \gamma p)^2 - 4\alpha\delta w^3} \right]. \end{aligned}$$

Имеем пару комплексно сопряжённых корней, если

$$(r - \gamma p)^2 < 4\alpha\delta w^3.$$

Допустим, что это неравенство выполнено, тогда

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{1}{2}(r + \gamma p).$$

Мы можем считать параметром μ коэффициенты r — темп роста леса, γ — темп изменения меры плодородия почвы или p — изменение типа почвообразующей породы.

Для них

$$\frac{d\operatorname{Re}\lambda}{d\mu} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}p, \quad \frac{1}{2}\gamma > 0$$

соответственно. Следовательно, может установиться автоколебание во всех трёх случаях. Хотя, видимо, приходится говорить о катастрофических автоколебаниях, связанных с грандиозными изменениями климата или с ураганами.

2.1. Компьютерное моделирование

Проведём компьютерный эксперимент с системой (5). Имеем программу в Maple:

```
>with(DEtools) :
>DEplot([diff(B(t),t) = 1 * B(t) * (1 - B(t)) - P(t),
diff(P(t),t) = 1 * (2 - (P(t))^2) * P(t) + 20 * B(t)], [B(t), P(t)],
t = 0..1000, B = -0.01..0.01, P = -0.1..0.1, arrows = LARGE,
color = [1 * (2 - (P(t))^2) * P(t) + 20 * B(t),
1 * B(t) * (1 - (B(t))^2) - P(t), .1]);
```

Получим картину изоклин, данную на рис. 3.

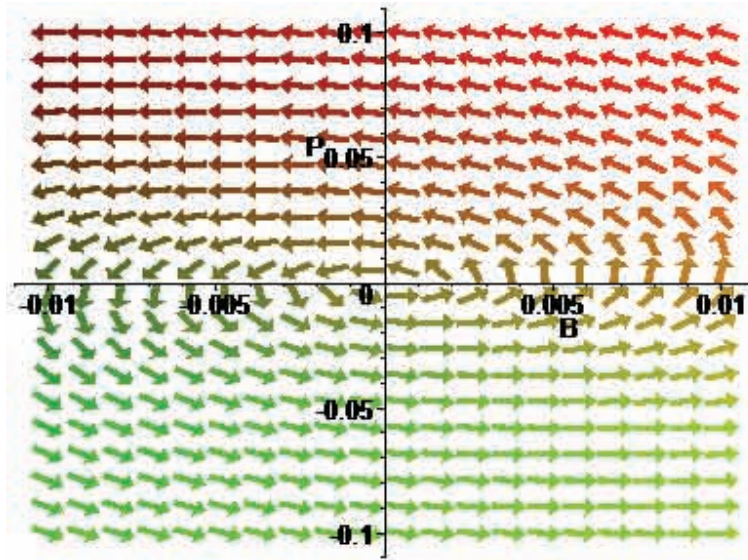


Рис. 3. Векторное поле системы (5), которое указывает на предельные циклы

На рис. 3 мы чётко видим предельные циклы вокруг точки $(B, P) = (0, 0)$, являющейся стационарным равновесием. Однако биомасса и мера плодородия почвы — положительные величины, и, следовательно, нужно брать ненулевые значения для координат равновесия. Но в действительности вместо уравнения (5) можно рассматривать систему

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= r(B - B_0) \left(1 - \frac{(B - B_0)}{k} \right) - \alpha w(P - P_0), \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma [p - (P - P_0)^2] (P - P_0) + \delta w^2 (B - B_0), \end{aligned} \quad (6)$$

где $B_0, P_0 > 0$ — истинные реальные величины, отвечающие стационарному равновесию (B_0, P_0) рассматриваемой системы «лес–почва», вокруг которого и рождаются предельные циклы. Иначе говоря, нет сомнения в появлении автоколебаний в системе «лес–почва».

3. Динамика взаимодействия «лес–вредитель»

В работе [7] предложены две простейшие математические модели разновозрастного леса, поражённого насекомыми-вредителями.

Учтены две ситуации:

- (1) вредитель питается только молодыми деревьями;
- (2) вредитель питается только старыми деревьями.

Значения параметров этой модели оценены для случая бальзамического пихтового леса и восточного елового почкового червя.

Показано, что вторжение небольшого количества вредителей в устойчивую лесную экосистему может привести к интенсивному колебанию её возрастной структуры. Возможные последствия экологических изменений также рассматриваются в лесных экосистемах.

Пусть x и y — плотность молодых и старых деревьев, ρ — плодовитость вида, а h — смертность и старение, и функция $\gamma(y)$ представляет зависимость смертности «молодых» деревьев от густоты «старых» деревьев.

Следуя Антоновскому и Корзухину [8], мы предполагаем, что существует некоторое оптимальное значение плотности «старых» деревьев, при котором развитие «молодых» деревьев идёт наиболее успешно. В этом случае можно выбрать $\gamma(y) = a(y - b)^2 + c$ (рис. 1).

Предположим, что в отсутствие пищи плотность вредителей экспоненциально снижается и что взаимодействие лес–насекомое можно описать билинейными терминами.

Таким образом, для случая, когда вредитель питается подлеском, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho y - \gamma(y)x - fx - Axz, \\ \dot{y} &= fx - hy, \\ \dot{z} &= -\epsilon z + Bxz, \end{aligned} \quad (7)$$

а для случая, когда вредитель питается взрослыми деревьями, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho y - \gamma(y)x - fx, \\ \dot{y} &= fx - hy - Ayz, \\ \dot{z} &= -\epsilon z + Byz. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь z — плотность насекомых, ϵ — уровень смертности насекомых, а члены с xz и yz представляют взаимодействие насекомое–лес.

3.1. Бифуркация Андронова–Хопфа в модели (7)

Путём линейной замены переменных, параметров и времени систему (7) можно преобразовать в форму

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho y - (y - 1)^2 x - sx - xz, \\ \dot{y} &= x - hy, \\ \dot{z} &= -\epsilon z + Bxz. \end{aligned} \quad (9)$$

Новые параметры получены подстановками

$$\frac{f\rho}{a^2b^4} \rightarrow \rho, \quad \frac{f+c}{ab^2} \rightarrow s, \quad \frac{h}{ab^2} \rightarrow h, \quad \frac{\epsilon}{ab^2} \rightarrow \epsilon, \quad \frac{B}{ab} \rightarrow B.$$

Напомним, что стационарные равновесия — это те, для которых

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0.$$

Система (9) может иметь от одного до четырёх состояний равновесия. Начало координат, $E_0 = (0, 0, 0)$, всегда есть точка стационарного равновесия.

Два положения равновесия $E_1 = (x_1, y_1, 0)$ и $E_2 = (x_2, y_2, 0)$, где

$$y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{\rho - sh}{h}}, \quad x_{1,2} = hy_{1,2},$$

появляются в системе (9) на линии $D_1 = \{(p, h) : p = sh\}$.

Помимо стационарных равновесий E_j , $j = 0, 1, 2$ система (9) могла бы иметь дополнительное равновесие

$$E_3 = \left(\frac{\epsilon}{B}, \frac{\epsilon}{Bh}, \frac{\rho - sh}{h} - \left(\frac{\epsilon}{Bh} - 1 \right)^2 \right).$$

Это равновесие появляется в $R_+^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0\}$ для значений параметров (ρ, h) , попадающих вправо от линии

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ (\rho, h) : \frac{\rho - sh}{h} - \left(\frac{\epsilon}{Bh} - 1 \right)^2 = 0 \right\}$$

в параметрической плоскости (см. рис. 1).

Помимо этих раздвоений равновесий в системе (9) могут «возникать» и «исчезать» автоколебания (т. е. устойчивые колебания). Эти события происходят на линиях R и P на плоскости параметров, в то время как автоколебания существуют в областях 5 и 6 (см. рис. 1).

Равновесие E_3 теряет устойчивость на линии прямой R в плоскости параметров (ρ, h) (см. рис. 1) (из-за перехода двух комплексно сопряжённых собственных значений из левой половины комплексной плоскости в правую). Это изменение устойчивости приводит к *бифуркации Андронова–Хопфа*, т. е. к появлению устойчивого предельного цикла в системе (9). Иначе говоря, к *появлению периодического равновесия* (автоколебания) (см. рис. 3).

Также есть линия P на (p, h) -плоскости, соответствующая разрушению предельных циклов. По мере приближения системы к линии P в пространстве параметров период предельного цикла увеличивается до бесконечности, а при критическом значении параметра предельный цикл сливается с сепаратрисным циклом и исчезает.

Итак, если вредители питаются только молодыми деревьями, то возможно возникновение периодических режимов в функционировании лесной экосистемы.

Посмотрим, что происходит в случае, когда вредители питаются только старыми деревьями.

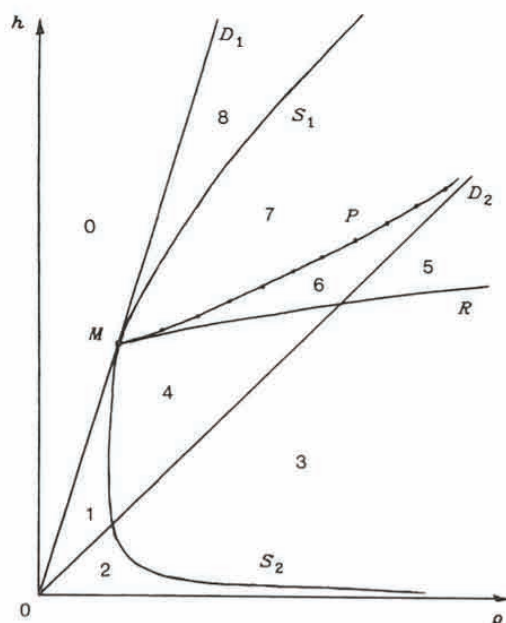


Рис. 4. Плоскость (ρ, h) и бифуркационные линии S_1, S_2, D_1, D_2, R и P , пересечение которых ведёт к бифуркациям, т. е. либо к раздвоением стационарных равновесий, либо к появлению периодических равновесий [7]

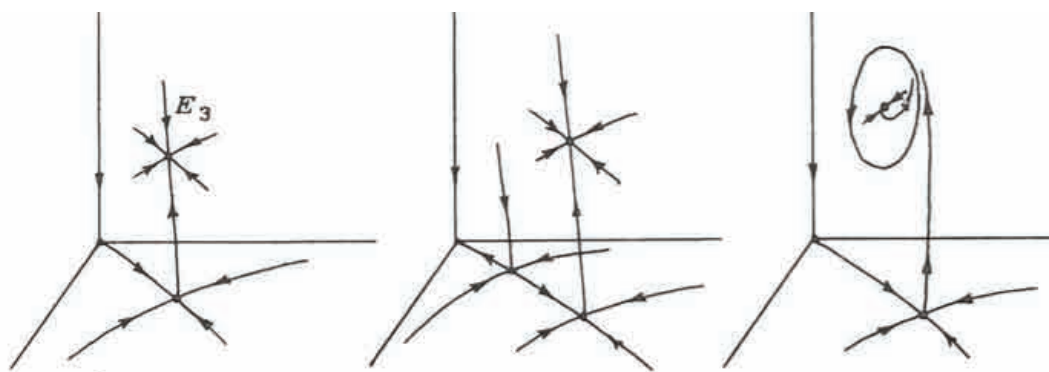


Рис. 5. Рождение периодического равновесия из стационарного равновесия E_3 при пересечении линии R [7]

3.2. Бифуркации в модели (8)

Модель (8), которая представляет собой вредителя, поражающего исключительно старые деревья, можно преобразовать путём масштабирования к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho y - (y - 1)^2 x - sx, \\ \dot{y} &= x - hy - yz, \\ \dot{z} &= -\epsilon z + Byz, \end{aligned} \tag{10}$$

где смысл переменных и параметров такой же, как в системе (8).

Система (10) может иметь от одной до четырёх точек равновесия в первом октанте R_+^3 : $E_0 = (0, 0, 0)$, $E_1 = (x_1, y_1, 0)$, $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ и $E_3 = (x_3, t_3, z_3)$. Равновесия E_1 и E_2 на плоскости $z = 0$ имеют те же координаты, что и в системе (3); они раздваиваются таким же образом на прямых D_1 и D_2 . Как и в системе (9), в системе (10) в R_+^3 существует точка равновесия

$$E_3 = \left(\frac{\rho \epsilon B}{(\epsilon - B)^2 + sB^2}, \frac{\epsilon}{B}, \frac{\rho B^2}{(\epsilon - B)^2 + sB^2} - h \right).$$

Это равновесие появляется в R_+^3 ниже линии

$$S = \left\{ (p, h) : \frac{\rho B^2}{(\epsilon - B)^2 + sB^2} - h = 0 \right\}.$$

Но стационарное равновесие E_3 не теряет устойчивости, поэтому автоколебания в системе (10) *невозможны!* Получается, что в случае, когда вредители питаются только старыми деревьями, не следует ожидать идентичных повторов в динамике леса.

4. Конкуренция лесообрабатывающей и синтетической промышленности

Рассмотрим модель, в которой конкурируют две отрасли промышленности: ту, что использует леса (древесину), и ту, что никак не связана с лесным сырьём — синтетическую промышленность [9].

Плотность биомассы растёт с точки зрения логистики, а скорость её роста снижается за счёт лесной промышленности. Синтетические же отрасли промышленности растут с постоянной скоростью.

В рассматриваемой статье определяются критерии бифуркации Андронова–Хопфа с использованием естественной скорости истощения древесных производств a_3 в качестве параметра бифуркации.

Пусть $B(t)$ — плотность в любой момент времени t лесной биомассы, $W(t)$ — деревообрабатывающей промышленности и $S(t)$ — синтетической промышленности.

Мы хотим сохранить лес, используя альтернативные древесные отрасли промышленности. Истощение лесов происходит в основном по вине деревообрабатывающей промышленности, населения и загрязнения.

Введём следующие коэффициенты:

- Предполагаем, что лес растёт с точки зрения логистики в отсутствие деревообрабатывающих производств с внутренним темпом роста r и ограничивающей рост величиной k .

- Величины c_1 , c_2 показывают влияние $S(t)$ на $W(t)$ и $W(t)$ на $S(t)$ соответственно. Кроме того, мы предполагаем, что деревообрабатывающая промышленность полностью зависит от лесной биомассы, а синтетическая — нет. Мы также считаем, что синтетические отрасли промышленности получают достаточное количество синтетического материала с постоянной скоростью Q .

• Скорость истощения лесной биомассы равна α , а α_1 — скорость роста деревообрабатывающей промышленности при наличии лесной биомассы.

• Наконец, h_1 и h_2 — это естественные темпы истощения лесной и синтетической промышленности соответственно.

Модель формулируется с помощью следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= rB\left(1 - \frac{B}{k}\right) - \alpha BW, \\ \frac{dW}{dt} &= \alpha_1 BW - c_1 WS - h_1 W, \\ \frac{dS}{dt} &= Q - c_2 WS - h_2 S, \end{aligned} \tag{11}$$

$$B(0) > 0, \quad W(0) > 0, \quad S(0) > 0.$$

Система (11) посредством подстановок

$$x = \frac{B}{k}, \quad y = \frac{W}{k}, \quad z = \frac{S}{k}$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - x) - axy, \\ \frac{dy}{dt} &= a_1 xy - a_2 yz - a_3 y, \\ \frac{dz}{dt} &= Q_0 - a_4 yz - a_5 z, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$a = \frac{\alpha k}{r}; \quad a_1 = \frac{\alpha_1 k}{r}; \quad a_2 = \frac{c_1 k}{r}; \quad a_3 = \frac{h_1}{r}; \quad a_4 = \frac{c_2 k}{r}; \quad a_5 = \frac{h_2}{r}, \quad Q_0 = \frac{q}{rk},$$

$$x(0) > 0, \quad y(0) > 0, \quad z(0) > 0.$$

4.1. Стационарные равновесия

Система (12) имеет четыре стационарных равновесия:

$$E_1 = \left(1, 0, \frac{Q_0}{a_5}\right), \quad E_2 = \left(0, 0, \frac{Q_0}{a_5}\right), \quad E^{*i} = (x^*, y^*, z^*), \quad (i = 1, 2),$$

где y^* — корень квадратного уравнения

$$aa_1 a_4 y^{*2} + (a_3 a_4 - a_1 a_4 + aa_1 a_5) y^* + (a_3 a_4 - a_1 a_4 + aa_1 a_5) = 0. \tag{13}$$

Это уравнение имеет два положительных корня, если

$$a_3 a_4 - a_1 a_4 + aa_1 a_5 < 0 \quad \text{и} \quad a_3 a_4 - a_1 a_4 + aa_1 a_5 > 0,$$

и один положительный корень, если

$$a_3a_4 - a_1a_4 + aa_1a_5 < 0 \quad \text{и} \quad a_3a_4 - a_1a_4 + aa_1a_5 < 0,$$

где

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{a_2Q_0 + a_3a_4y^* + a_3a_5}{a_1a_4y^* + a_1a_5}, \\ z^* &= \frac{Q_0}{a_1y^* + a_5}, \\ y_1^* &= \frac{-a_3a_4 + a_1(a_4 - aa_5) \pm \sqrt{((a_1 - a_3)a_4 + aa_1a_5)^2 - 4aa_1a_2a_4Q_0}}{2aa_1a_4}. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} E^{*1} &= \\ &= \left(\frac{(a_1 + a_3)a_4 + aa_1a_5 - \sqrt{(a_3a_4 - a_1(a_4 + aa_5))^2 - 4aa_1a_2a_4Q_0}}{2a_1a_4}, \right. \\ &\quad \frac{-a_3a_4 + a_1(a_4 - aa_5) + \sqrt{((a_1 - a_3)a_4 + aa_1a_5)^2 - 4aa_1a_2a_4Q_0}}{2aa_1a_4}, \\ &\quad \left. \frac{-a_3a_4 + a_1(a_4 - aa_5) + \sqrt{((a_1 - a_3)a_4 + aa_1a_5)^2 - 4aa_1a_2a_4Q_0}}{2aa_1a_4} \right) \\ E^{*2} &= \\ &= \left(\frac{(a_1 + a_3)a_4 + aa_1a_5 - \sqrt{(a_3a_4 - a_1(a_4 + aa_5))^2 - 4aa_1a_2a_4Q_0}}{2a_1a_4}, \right. \\ &= \frac{(-a_1 + a_3)a_4 - aa_1a_5 + \sqrt{(a_3a_4 - a_1(a_4 + aa_5))^2 - 4aa_1a_2a_4Q_0}}{2aa_1a_4}, \\ &\quad \left. \frac{-a_3a_4 - a_1(a_4 - aa_5) + \sqrt{((a_1 - a_3)a_4 + aa_1a_5)^2 - 4aa_1a_2a_4Q_0}}{2aa_1a_4} \right). \end{aligned}$$

4.2. Наличие бифуркации Андронова–Хопфа

Установлено существование стационарных равновесий: $E_1(1, 0, \frac{Q_0}{a_5})$, $E_2(0, 0, \frac{Q_0}{a_5})$ и $E^{*i}(B^*, W^*, S^*)$.

Теперь мы исследуем возможность бифуркации Хопфа указанной выше системы (12), взяв a_3 (то есть скорость естественного истощения) в качестве параметра бифуркации μ .

Положим

$$\begin{aligned} b_1 &= x^* + \frac{Q_0}{z^*}, \quad b_2 = aa_1x^*y^* + \frac{Q_0x^*}{z^*} - a_2a_4y^*z^*, \\ b_3 &= \frac{aa_1Q_0x^*y^*}{z^*} - a_2a_4x^*y^*z^*. \end{aligned}$$

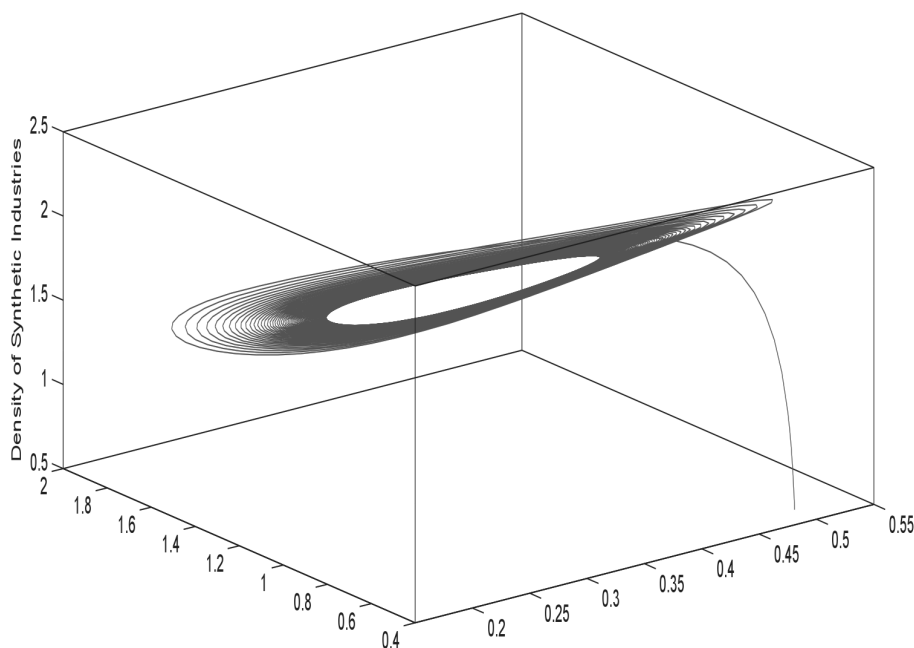


Рис. 6. Рождение периодического равновесия из стационарного равновесия E^* при $\mu = \mu_0 = (a_3)_0$ [9]

Необходимыми и достаточными условиями существования бифуркации Хопфа являются, если существует $\mu_0 = (a_3)_0$ такое, что

- 1) $b_i(\mu_0) > 0$ ($i = 1, 2, 3$);
- 2) $b_1(\mu_0)b_2(\mu_0) - b_3(\mu_0) = 0$, т. е.

$$-a_2a_4Q_0y^* + \mu_0a_1y^*(1 - \mu_0y^*)^2 + (1 - \mu_0y^*)^2 \times \\ \times (a_4y^* + a_5) + (1 - \mu_0y^*)(a_4y^* + a_5)^2 = 0;$$

3) если мы рассмотрим собственные значения характеристического уравнения

$$P(\lambda) = \lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

вида $\lambda_i = u_i + iv_i$, то

$$\frac{d}{d\mu}(u_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Находим, что $u(\mu_0) = 0$ и

$$8u^3 + 8b_1u^2 + 2(b_1^2 + b_2)u + b_1b_2 - b_3 = 0.$$

Дифференцируя это уравнение по $\mu = a_3$, получаем

$$\frac{d}{d\mu}(u) = \frac{-\frac{d}{d\mu}(b_1b_2 - b_3)}{2b_1^2 + b_2} \neq 0.$$

То есть удовлетворяются условия теорем Андронова–Хопфа. Следовательно, из E^* рождаются автоколебания в результате бифуркации Андронова–Хопфа. (рис. 6).

Авторы представляемой здесь работы обнаружили также, что когда естественная скорость истощения $\mu = a_3$ превышает своё пороговое значение, система становится стабильной, в то время как ниже порогового значения система колеблется вокруг внутреннего равновесия E^* .

5. Заключение

Известны многие циклические, повторяемые, периодические явления, фиксируемые при изучении лесных экосистем. «При циклических изменениях лесной биогеоценоз через определённое время вновь возвращается в состояние, весьма близкое к первоначальному, после прекращения действия факторов, вызвавших данные изменения. В зависимости от продолжительности выделяют суточные, сезонные и погодичные циклические изменения» [11]. Очевидно, что важно иметь математические модели лесных экосистем, отражающие перечисленные природные периодические процессы. Но желательно иметь также модели, в которых можно наблюдать и другие устойчивые циклические процессы, причём модель должна описывать экосистему как до появления циклов, так и сам момент и условия их зарождения. Мы представили три подобные модели, но их число на сегодняшний день гораздо больше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фомичев А.В. Элементы теории бифуркаций и динамических систем. Часть 1. М. : МФТИ, 2019. 42 с.
2. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. М. : Мир, 1982.
3. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. М. : Мир, 1980.
4. Vo Sang. Hopf bifurcation formulae and applications to the Genesio-Tesi system // J. Nonlinear Funct. Anal., 2019, Article ID 34. URL: <http://jnfa.mathres.org/issues/JNFA201934.pdf> (дата обращения: 30.08.2021)
5. Болотов М.И., Гонченко С.В., Гонченко А.С., Гринес Е.А., Казаков А.О., Леванова Т.А., Лукьянов В.И. Бифуркация Андронова–Хопфа для потоков и отображений. Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2017. 73 с.
6. Володченкова Л.А. Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка» // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.
7. Antonovsky M.Ya., Fleming R.A., Kuznetsov Yu.A., Clark W.C. Forest-Pest Interaction Dynamics: The Simplest Mathematical Models // Theoretical Population Biology. 1990. V. 37, No. 2. P. 343–367.
8. Antonovsky M.Ya., Korzukhin M.D. Mathematical modelling of economic and ecological-economic processes // Integrated Global Monitoring of Environmental Pollution, Proc. 2nd International Symp., Tbilisi, USSR, 1981, P. 353–358, Gidromet, Leningrad.
9. Chaudhary M.M., Dhar J., SahM G.P. Mathematical Model of Depletion of Forestry Resource: Effect of Synthetic Based Industries // World Academy of Science,

- Engineering and Technology International Journal of Biological Sciences. 2013. V. 7, No. 4. P. 798–802.
10. Hasan N., Uddin S., Biswas H.A. Optimal control applied to sustainable forest management of ecosystem // *Differential Equations and Dynamical Systems* (to be published).
 11. Кищенко И.Т. Лесоведение и лесная экология. Динамика лесных биогеоценозов. М. : Издательство Юрайт, 2020. 392 с.

MATHEMATICAL MODELS OF FORESTRY ECOSYSTEMS WITH THE ANDRONOV–HOPF BIFURCATIONS

L.A. Volodchenkova

Ph.D. (Biology), Asso professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

A.K. Guts

Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. Long-term studies of forest ecosystems show that in addition to stationary equilibrium states the periodic processes can appear. In what conditions do they arise? In the article we demonstrate corresponding mathematic models

Keywords: forest ecosystems, mathematical models, bifurcation, Andronov–Hopf bifurcation theory.

REFERENCES

1. Fomichev A.V. *Elementy teorii bifurkatsii i dinamicheskikh sistem. Chast' 1.* Moscow, MFTI Publ., 2019, 42 p. (in Russian)
2. Kasti Dzh. *Bol'shie sistemy. Svyaznost', slozhnost' i katastrofy.* Moscow, Mir Publ., 1982. (in Russian)
3. Marsden Dzh. and Mak-Kraken M. *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya.* Moscow, Mir Publ., 1980. (in Russian)
4. Bo Sang. Hopf bifurcation formulae and applications to the Genesio-Tesi system. *J. Nonlinear Funct. Anal.*, 2019, Article ID 34. URL: <http://jnfa.mathres.org/issues/JNFA201934.pdf> (30.08.2021).
5. Bolotov M.I., Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Grines E.A., Kazakov A.O., Levanova T.A., and Luk'yanov V.I. *Bifurkatsiya Andronova–Khopfa dlya potokov i otobrazhenii.* Nizhnii Novgorod, Nizhegorodskii gosuniversitet Publ., 2017, 73 p. (in Russian)
6. Volodchenkova L.A. *Model' plodorodiya pochvy s tochki zreniya katastrofy "sboraka". Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie: sbornik materialov Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii (Omsk, 21 noyabrya 2014 g.), Omsk, izd-vo Om. gos. un-ta, 2014, pp. 25–26.* (in Russian)
7. Antonovsky M.Ya., Fleming R.A., Kuznetsov Yu.A., and Clark W.C. *Forest-Pest Interaction Dynamics: The Simplest Mathematical Models.* *Theoretical Population Biology*, 1990, vol. 37, no. 2, pp. 343–367.

8. Antonovsky M.YA. and Korzukhin M.D. Mathematical modelling of economic and ecological-economic processes. In *Integrated Global Monitoring of Environmental Pollution*, Proc. 2nd International Symp., Tbilisi, USSR, 1981, P. 353–358, Gidromet, Leningrad.
9. Chaudhary M.M., Dhar J., and SahM G.P. Mathematical Model of Depletion of Forestry Resource: Effect of Synthetic Based Industries. *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Biological Sciences*, 2013, vol.7, no. 4, pp. 798–802.
10. Hasan N., Uddin S., and Biswas H.A. Optimal control applied to sustainable forest management of ecosystem. *Differential Equations and Dynamical Systems* (to be published).
11. Kishchenko I.T. *Lesovedenie i lesnaya ekologiya. Dinamika lesnykh biogeotsenozov*. Moscow, Izdatel'stvo Yurait, 2020, 392 p. (in Russian)
(in Russian)

Дата поступления в редакцию: 01.09.2021