

А. К. Гуц
ПЛОТНАЯ АФФИННАЯ ПОЛУГРУППА, НЕ ЯВЛЯЮЩАЯСЯ
ЛУЧЕВОЙ

Подполугруппа P , содержащая единицу e , в вещественной конечномерной группе Ли G_n называется *лучевой*, если

$$P = \{x = s_{i_1}(t_1) \dots s_{i_m}(t_m)\},$$

где $s_i(t)$ – 1-параметрическая полугруппа, лежащая в P . Лучевая подполугруппа является *плотной*, если для любого $a \in P$ найдется $x \in P$ такой, что $x^{-1}a \in P$.

Пусть G_m допускает полную левоинвариантную аффинную структуру. Полугеодезические аффинной структуры называем лучами. Конус с началом e – это объединение лучей, исходящих из e . В связной односвязной абелевой группе Ли A_m любой конус является лучевой подполугруппой. В неабелевых группах Ли это утверждение не верно, как показывает следующий пример.

Рассмотрим связную односвязную группу Ли G_3III по классификации Бьянки, левые сдвиги и подполугруппа P для которой в некоторых аффинных координатах записываются в виде

$$L_x y = xy = (e^{x_3} y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3),$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3),$$

$$P = \{x : x_3 > \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ \& \ x_3 > 0\} \cup \{(0, x_2, x_3) : x_3 = \pm x_2 \ \& \ x_3 > 0\} \cup \{e\},$$
$$e = (0, 0, 0).$$

Тогда P плотная подполугруппа, являющаяся конусом, но не лучевая. Другими словами, конус в смысле аффинной структуры не обязан быть "конусом" относительно групповой структуры.

Гипотеза. Лучевыми (и левыми) являются замкнутые плотные подполугруппы.

Это утверждение справедливо для A_m и основной аффинной группы Ли.