СТРУКТУРЫ ПОРЯДКА НА РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ

Задания и методические указания
к их выполнению для студентов Ш–IУ курсов
математического факультета

Структуры порядка на разрешимых группах Ли: Задания и методические указания к их выполнению для студентов Ш-IУ курсов математического факультета /Сост. А.К. Гуц. Омск: Омск. ун-т, 1988. 23с.

Изучая произвольную совокупность объектов $\{x, y, z, \dots\}$ можно заняться вопросом совпадения отдельных объектов или их различия. Но можно рассмотреть задачу, имеющую цель установить, какой из любых двух объектов x, y первичен по отношению к другому. Так приходят к понятию порядка на множестве $\{x, y, z, \dots\}$. Отношение порядка, во-первых, предполагает несимметричность соотносимых объектов x, y (что отражается в самой записи отношения порядка $x \leq y$), а во-вторых, требует, чтобы эта несимметричность была устойчивой (т.е. отношение $\leqslant$ должно быть транзитивным).

Множество объектов с отношением порядка - предмет теории упорядоченных множеств. Последняя, как правило, излагается формальным языком. Содержательная часть теории от этого, впрочем, не страдает, но в чисто педагогических целях следует дополнить чистую логику наглядностью понятий.

Именно такова цель этих методических указаний - дать геометрическое изложение теории порядка и упорядоченных множеств.

Тема I. СТРУКТУРЫ ПОРЯДКА

Структурой порядка на множестве A называется пара,

$$\langle A, \mathcal{P} \rangle,$$

где $\mathcal{P} = \{P_a :\ a \in A\}$ - семейство подмножеств множества A, удовлетворяющее аксиомам:

P1. $a \in P_a$ для любой $a \in A$;

P2. Если $b \in P_a$, то $P_b \subset P_a$;

P3. Если $a \neq b$, то $P_a \neq P_b$.

Аксиомы P1 - P3 могут быть записаны в иных обозначениях.

Введем на A бинарное отношение $a \leq b$, считая, что оно истинно тогда и только тогда, когда в $b \in P_a$. В таком случае $P1 - P3$ примут вид:

$P1'$. $a \leq a$;

$P2'$. $a \leq b$ и $b \leq c$ влечет $a \leq c$;

$P3'$. $a \leq b$ и $b \leq a$ влечет $a = b$.

Множество A, наделенное структурой порядка, называется упорядоченным множеством. Будем также говорить, что в A задан (частичный) порядок $\mathcal{P}$.

Может случится, что семейство $\mathcal{P}$ удовлетворяет только аксиомам $P1, P2$. Тогда говорим, что на A задан предпорядок $\mathcal{P}$, а A является предупорядоченным множеством.

Порядок $\mathcal{P}$ называется тривиальным, если $P_a = \{a\}$; предпорядок $\mathcal{P}$ тривиален, если $P_a = A$.

Пусть $\langle A, \mathcal{P} \rangle$, где $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A\}$ – структуры порядка и $\leq$ бинарное отношение порядка, порожденное порядком $\mathcal{P}$.

Положим

$$P_x^- = \{y \in A : y \leq x\}.$$

Семейство $\mathcal{P}^- = \{P_x^- : x \in A\}$ задает в A порядок, двойственный к порядку $\mathcal{P}$. Множество $P_x \cap P_y^-$, где $y \in P_x$, называется **и н т е р в а л о м**.

Имеем при $y \in P_x$

$$P_x \cap P_y^- = \{z \in A : x \leq z \leq y\}.$$

Пусть $\langle A, \{P_x : x \in A\} \rangle$, $\langle B, \{Q_x : x \in B\} \rangle$ две структуры порядка. Инъективное отображение $f : A \to B$ называется монотонным или сохраняющим порядок, если

$$f(P_x) \subset Q_{f(x)} \tag{I.I}$$

для любой $x \in A$.

Вводя отношения (частичного) порядка $\leqslant$ и $\preccurlyeq$ соответственно, отвечающие семействам $\{P_x : x \in A\}$ и $\{Q_x : x \in B\}$ так же, как было сказано выше, мы можем условие (I.I) заменить иным, эквивалентным: для любых $x, y \in A$ из $x \leqslant y$ следует $f(x) \preccurlyeq f(y)$.

В случае, когда $f : A \to B$ биекция и вместе с (I.I) выполняется условие

$$f^{-1}(Q_x) \subset P_{f^{-1}(x)}, \qquad (I.2)$$

то есть из $x \preccurlyeq y$, где $x, y \in B$ следует, что $f^{-1}(x) \leqslant f^{-1}(y)$, будем говорить, что f есть изоморфизм (или порядковый изоморфизм).

Включение (I.2) эквивалентно включению

$$Q_{f(x)} \subset f(P_x).$$

Следовательно, биекция $f : A \to B$ является изоморфизмом в том и только в том случае, когда

$$f(P_x) = Q_{f(x)} \qquad (I.3)$$

для любой $x \in A$.

Если $\langle A, \{P_x : x \in A\}\rangle$ – структура порядка, а $f : A \to A$ порядковый изоморфизм, то будем его называть автоморфизмом (порядковым автоморфизмом) или $\mathcal{P}$ - автоморфизмом.

Если $\langle A, \mathcal{P}\rangle$ – структура порядка, то через $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ обозначим группу всех $\mathcal{P}$ – автоморфизмов.

Группа $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ действует транзитивно на A, если для любых $x, y \in A$ существует $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ такой, что $f(x) = y$.

Группа $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ действует на A просто транзитивно, если для любых $x, y \in A$ существует единственный $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ такой, что $f(x) = y$.

Пусть T — некоторая группа биекций множества $\langle A, \mathcal{P} \rangle$ на себя. Говорим, что порядок $\mathcal{P}$ инвариантен относительно группы T, если $T \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{P})$.

В данных указаниях мы рассматриваем, как правило, структуру порядка $\langle A, \mathcal{P} \rangle$ инвариантную относительно некоторой группы T, которая действует просто транзитивно на A.

ЗАДАНИЯ

1) Пусть $f : \langle A, \leqslant \rangle \to \langle B, \preccurlyeq \rangle$ — изоморфизм. Будет ли изоморфизмом биекция $f^{-1} : \langle B, \preccurlyeq \rangle \to \langle A, \leqslant \rangle$?

2) Убедитесь, что если f $\mathcal{P}$-автоморфизм, то f также $\mathcal{P}^-$-автоморфизм;

3) Будет ли группа преобразований

$$\begin{cases} \bar{x} = x\cos\varphi + y\sin\varphi + \alpha \\ \bar{y} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + \beta \end{cases} \qquad \varphi, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

действовать просто транзитивно на евклидовой плоскости?

4) Убедитесь, что группа преобразований

$$\begin{cases} \bar{x} = \lambda x + \alpha \\ \bar{y} = \lambda y, \end{cases} \tag{I.4}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ действует просто транзитивно на полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \}$;

5) Приведите пример порядка на $\mathbb{R}^2_+$, инвариантного относительно группы (I.4);

6) Приведите пример порядка на аффинной плоскости (не обязательно инвариантный относительно какой-либо группы T) с неограниченными интервалами $P_x \cap P^-_y$.

Тема 2. ИНВАРИАНТНЫЙ СВЯЗНЫЙ ПОРЯДОК В АФФИННОЙ ПЛОСКОСТИ A^2

На аффинной плоскости A^2 действует просто транзитивно абелева группа параллельных переносов T. Естественно рассматривать порядки (и предпорядки) в A^2, инвариантные относительно группы T. Изучим связный инвариантный порядок в A^2.

Порядок $\mathcal{P}$ называется связным, если для каждого P_x точка x предельная для $P_x \setminus \{x\}$, т.е. $x \in \overline{P_x \setminus \{x\}}$.

Наша ближайшая цель дать читателю наглядное представление о порядке. Другими словами, читатель должен у в и д е т ь, как устроены множества P_x, если они определяют инвариантный порядок $\mathcal{P}$ в A^2.

Будем добиваться своей цели с помощью серии примеров и задач.

Вводим в A^2 аффинную систему координат x_1, x_2 с началом e. Каждая точка $x \in A^2$ может быть отождествлена с парой ее координат (x_1, x_2), а A^2 с арифметическим пространством $\mathbb{R}^2$. Будем это далее делать без каких-либо оговорок и, более того, примем, что x_1, x_2 прямоугольные декартовы координаты.

Нижеследующий пример показывает, как проверяется наличие порядка.

<u>Пример I</u>. Положим $P_x = \{y = (y_1, y_2) \in A^2 : x_1 \leq y_1 \,\&\, x_2 \leq y_2\}$.

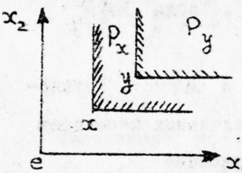


Рис. I

Тогда $\mathcal{P} = \{P_x\}$ задает инвариантный порядок в A^2. Действительно, геометрически множество P_x - это прямой угол с вершиной x и сторонами, параллельными осям координат (см. рис. I). Поэтому совершенно очевидно, что $y \in P_x$

влечет $P_y \subset P_x$, а кроме того при параллельных переносах углы $\{P_x\}$ совмещаются друг с другом, если только совмещены их вершины. Свойство: $(x \neq y \Rightarrow P_x \neq P_y)$ также усматривается из рис. I-3.

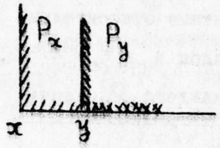


Рис. 2

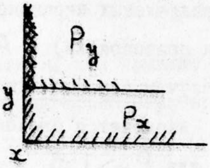


Рис. 3

Итак, мы имеем порядок в A^2. Геометрия показала свою силу! А как выглядело бы соответствующее доказательство под пером алгебраиста?

Первое: $x \in P_x$. Следует из определения P_x.
Второе. Пусть $y \in P_x$, т.е. $x_1 \leq y_1$ & $x_2 < y_2$, где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Возьмем $z = (z_1, z_2) \in P_y$. Имеем из определения P_y следующие неравенства:

$$y_1 \leq z_1 \;\&\; y_2 \leq z_2.$$

Но $x_1 \leq y_1$ и $x_2 \leq y_2$, поэтому $x_1 \leq y_1 \leq z_1$ и $x_2 \leq y_2 \leq z_2$, т.е. $x_1 \leq z_1$ и $x_2 \leq z_2$. Это означает, что $z \in P_x$. В силу произвольности точки $z \in P_y$ мы показали: $P_y \subset P_x$.

Третье: $(x \neq y \Rightarrow P_x \neq P_y)$. Раз $x \neq y$, то $x_1 \neq y_1$ или $x_2 \neq y_2$. Пусть для определенности $x_1 < y_1$. Возьмем точку $z \in P_x$ такую, что $x_1 < z_1 < y_1$. Тогда $z \notin P_y$ и поэтому $P_x \neq P_y$.

Итак доказано, что $\{P_x\}$ задает порядок в A^2. Установим его инвариантность относительно группы параллельных переносов T. Если $t \in T$, то ему отвечает отображение

$$t : (x_1, x_2) \to (x_1 + t_1, x_2 + t_2),$$
$$x = (x_1, x_2) \in A^2.$$

Следовательно, если $x \leq y$, то $x_1 \leq y_1$ и $x_2 \leq y_2$. Поэтому $x_1 + t_1 \leq y_1 + t_1$ и $x_2 + t_2 \leq y_2 + t_2$, т.е. $t(x) \leq t(y)$. Инвариантность доказана.

Следующий пример потребует от читателя большей самостоятельности.

ПРИМЕР 2. Здесь рассмотрим уже предпорядок.

Пусть $P_x = \{ (y_1, y_2) \in A^2 : x_2 + 1 \leq y_2 \} \cup \bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \{ (y_1, y_2) : y_1 = x_1 + n \ \& \ x_2 \leq y_2 \leq x_2 + 1 \}.$

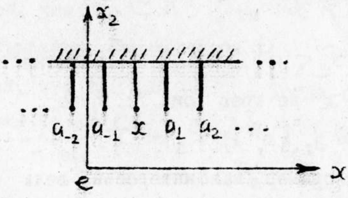


Рис. 4

Геометрически P_x - это полуплоскость с краем, параллельным оси x_1, и "приклеенными" к ней на расстоянии I друг от друга отрезками "хвостиками" длины I , параллельными оси x_2 (см. рис. 4).

Чтобы убедиться, что $\{P_x\}$ задает предпорядок, т.е. $y \in P_x \Rightarrow$ $\Rightarrow P_y \subset P_x$ достаточно рассмотреть рис. 5, 6.

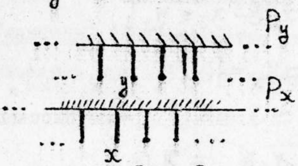


Рис. 5

Рис. 6

Почему $\{P_x\}$ не является собственно порядком? За счет "хвостиков", ибо любой из концов a_n "хвостиков" множества P_x (см.рис. 4) может считаться "началом" области P_x , т.е.

Инвариантность предпорядка $\{P_x\}$ вполне наглядна, ибо при параллельных переносах множества P_x переходят друг в друга.

Задача I. Доказать, что если P_x лежит в углу K_x с вершиной x, причем $\measuredangle K_x < \pi$, то $\{P_x\}$ обязательно задает порядок, т.е. выполняется аксиома $P3$.

Возникает вопрос: обязательно ли $\{P_x\}$ задает собственно предпорядок, если $\measuredangle K_x = \pi$? Пример 2 как раз связан с $\measuredangle K_x = \pi$.

Следующий пример показывает, что даже при $\measuredangle K_x = \pi$ семейство $\{P_x\}$ может задавать порядок.

Пример 3. $P_x = \{(y_1, y_2) \in A^2 : x_2 < y_2\} \cup \{x\}$ - открытая полуплоскость с добавленной точкой x на краю (рис.7). Ясно, $P_x \subseteq K_x = \{(y_1, y_2) \in A^2 : x_2 \le y_2\}$, $\measuredangle K_x = \pi$.

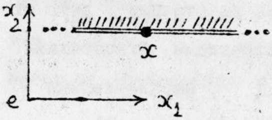


Рис. 7

Но этот пример малоинтересен, ведь здесь P_x не является замкнутым множеством. Впрочем, не следует искать тут существенного препятствия, как показывает

Пример 4. Берем (см. рис. 8) $P_x = \{(y_1, y_2) \in A^2 : x_1 \le y_1 \,\&\, x_2 + 1 \le y_2\} \cup \{(y_1, y_2) \in A^2 : y_1 \le x_1 \,\&\, x_2 \le y_2\}$.

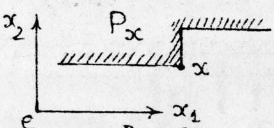


Рис. 8

Ясно, $P_x \subset K_x = \{(y_1, y_2) : x_2 \le y_2\}$, K_x -полуплоскость, $\measuredangle K_x = \pi$.

Задача 2. Проверить, что $\{P_x\}$ из примеров 3, 4 задает связный инвариантный порядок в A^2.

Задача 3. Верно ли, что если $\mathcal{P}$ связный порядок, то для любой $y \in P_x$ интервалы $P_x \cap P_y^-$ связны?

Предпорядок $\mathcal{P}$ называется сильно связным, если для любой $y \in P_x$ интервалы $P_x \cap P_y^-$ связны, где $x \in A^2$.

Задача 4. Является ли связным сильно связной предпорядок?

Задача 5.* Пусть $\operatorname{int} P_e \neq \emptyset$ и $x_0 \in \operatorname{int} P_e$. Тогда существует точка $x_1 \in L(e, x_0)$ -лучу с началом e и проходящему через x_0 такая, что $L(e,x_0) + \overrightarrow{ex_1} \subset \operatorname{int} P_e$. Более того, существует угол K_u с вершиной u такой, что $\operatorname{int} K_u \neq \emptyset$ и $K_u \subset \operatorname{int} P_e$.

Задача 6. Если $\mathcal{P}$ предпорядок, и K -угол с вершиной e такой, что $P_e \subset K$, то $\measuredangle K = \pi$.

Указание. Пусть $P_e = P_a$, $a \neq e$. Возьмем перенос t такой, что $t(e) = a$. Тогда $a_n = \underbrace{t \circ \ldots \circ t}_{n\text{-раз}}(e) \in P_e$, $a_{-n} = \underbrace{t^{-1} \circ \ldots t^{-1}}_{n\text{-раз}}(e) \in P_e$. Но $\{a_n\}$, $\{a_{-n}\}$ лежат на прямой (рис.9).

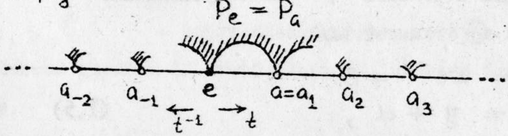


Рис. 9

Задача 7.* Доказать, что если $\mathcal{P}$ предпорядок, $\operatorname{int} P_e \neq \emptyset$, то $\operatorname{int} P_e$ содержит прямую L.

Указание. Доказательство состоит из совместного применения результатов задач 5, 6 и изображено на рис. IO.

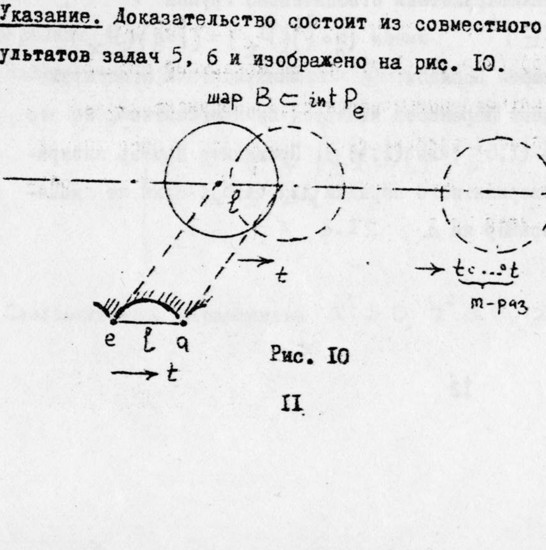


Рис. IO

Задача 8. Если $\mathcal{P}$ -предпорядок и $\operatorname{int} P_e \neq \varnothing$, то P_e содержит замкнутую полуплоскость.

Задача 9. Верно ли, что если P_e содержит полуплоскость, то $\mathcal{P}$ (собственно) порядок.

Задача 10. Пусть для каждой $x \in P_e$ $P_e \cap P^-_x$ - ограничено. Верно ли, что $P_e = K$, где K угол с вершиной e и $\measuredangle K < \pi$?

Решение дано на с.21. Но следует попытаться справиться с этой задачей самостоятельно. Она не так трудна: достаточно "порисовать" на плоскости несколько примеров порядков.

Задача 11. Привести пример неинвариантного порядка в A^2.

Задача 12. На аффинной плоскости A^2 действует просто транзитивно еще одна аффинная группа преобразований, которая в отличие от группы параллельных переносов T некоммутативная.

Указанная группа G имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{x} = xe^{-\alpha} + \beta \\ \bar{y} = y + \alpha , \end{cases} \tag{I.5}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и изоморфна группе (I.4), что полезно проверить.

Порядок $\mathcal{P}$ бинвариантный относительно группы Γ, если для любых $g, f \in \Gamma$ имеем $(g\circ f)(P_x) = (f\circ g)(P_x)$.

Убедитесь, что любой порядок $\mathcal{P}$ инвариантный относительно группы параллельных переносов является биинвариантным, но это не верно для группы (I.5) (или (I.4)). Приведите пример инвариантного, но не биинвариантного порядка для (I.5). Если не сможете, то посмотрите пример на с. 21.

Тема 3. ПОРЯДКИ НА ТРЕХМЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ

Каждая трехмерная связная односвязная разрешимая группа Ли $\mathcal{G}_3$ реализуется как группа G_3 аффинных преобразований 3-мерного аффинного пространства A^3, действующая просто транзитивно на A^3. Поэтому порядки на $\mathcal{G}_3$, инвариантные относительно левых сдвигов, можно описывать как порядки в A^3, инвариантные относительно группы G_3.

Считаем, что в A^3 введены аффинные координаты x^1, x^2, x^3 с началом в точке e. С их помощью отождествляем A^3 с $\mathbb{R}^3$.

Пример 5. Рассмотрим группу Гейзенберга

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 - t x^2 + s \\ \bar{x}^2 = x^2 + l \\ \bar{x}^3 = x^3 + t, \end{cases} \tag{3.I}$$

где t, s, l - произвольные числа, которая является связной односвязной группой Ли преобразований, имеющей тип $G_3\,\mathrm{II}$ по Бианки.

Как найти порядок в A^3, инвариантный относительно (3.I) ? Возьмем конус

$$P_e = \{ x \in A^3 : x^1 \geqslant 0, x^2 \geqslant 0, x^3 \leqslant 0 \}$$

с вершиной e.

Найдем его образ при преобразовании (3.I), переводящем точку $e = (0,0,0)$ в точку (s, l, t). Из (3.I) находим

$$\begin{cases} x^1 = \bar{x}^1 + t(\bar{x}^2 - l) - s \\ x^2 = \bar{x}^2 - l \\ x^3 = \bar{x}^3 - t \end{cases}$$

Следовательно, неравенства $x^1 \geqslant 0, x^2 \geqslant 0, x^3 \leqslant 0$

переходят в неравенства

$$\bar{x}^1 + t(\bar{x}^2 - l) \geqslant s, \ \bar{x}^2 \geqslant l, \ \bar{x}^3 \leqslant t.$$

Геометрически это означает, что конус P_e вначале подвергается "подъему" по оси x^3 с помощью преобразования

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 - tx^2 \\ \bar{x}^2 = x^2 \\ \bar{x}^3 = x^3 + t \end{cases},$$

которое точку $e = (0,0,0)$ переводит в точку $(0,0,t)$, а затем параллельно переносится с помощью преобразования

$$(x^1, x^2, x^3) \to (x^1 + s, x^2 + l, x^3)$$

в точку (s, l, t).

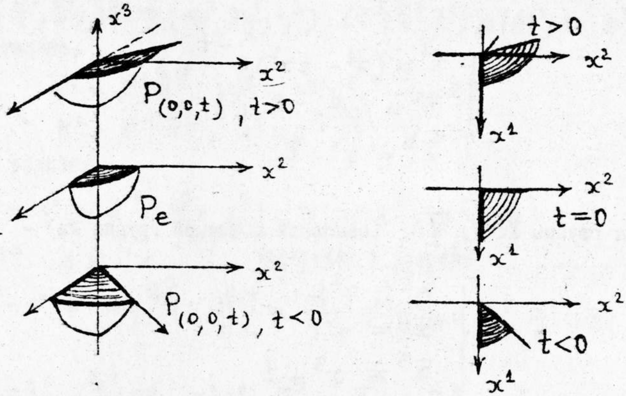
Поэтому можно написать

$$P_{(x^1,x^2,x^3)} = \{ y \in A^3 : y^1 + x^3 y^2 \geqslant 0, \ y^2 \geqslant 0, \ y^3 \leqslant x^3 \} + \overrightarrow{(x^1, x^2, 0)}. \quad (3.2)$$

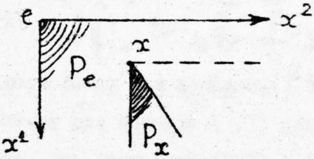
Как проверить, что семейство конусов $\mathcal{P} = \{P_x\}$ задает порядок в A^3 (инвариантность $\mathcal{P}$ относительно $G_3 \text{II}$ вытекает из способа построения этого семейства - разносом P_e по A^3 с помощью преобразований из $G_3 \text{II}$)?

Делается это так же, как в примере I, т.е. либо геометрически, либо алгебраическими выкладками.

Расположение $P_{(0,0,t)}$ в A^3 видно из рисунков:



Следовательно, трехгранный угол P_x, если $x \in P_e$ является более "узким" в сечении плоскостью параллельной $\{x^3=0\}$, чем P_e, и поэтому $P_x \subset P_e$.



Попробуйте теперь чисто алгебраическими вычислениями доказать, что $x \in P_e \Rightarrow P_x \subset P_e$!

Задание. Показать, что множества

$$P_{(x^1,x^2,x^3)} = \{y \in A^3 : y^2 \geqslant e^{x^3} y^1,\ y^2 \geqslant 0,\ y^3 \geqslant x^3\} + \overrightarrow{(x^1,x^2,0)}$$

задают порядок $\mathcal{P}$ в A^3, инвариантный относительно группы Ли $G_3\ \overline{\text{III}}$ по Бианки:

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 e^{-t} + s \\ \bar{x}^2 = x^2 + \ell \\ \bar{x}^3 = x^3 + t \end{cases}$$

Задача 13. Для группы Ли $G_3\ \overline{\text{IV}}$

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = (x^1 - tx^2)e^{-t} + s \\ \bar{x}^2 = x^2 e^{-t} + l \\ \bar{x}^3 = x^3 + t, \end{cases}$$

для группы Ли $G_3\,\overline{\underline{V}}$ (основной аффинной группы Ли) -

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 e^{-t} + s \\ \bar{x}^2 = x^2 e^{-t} + l \\ \bar{x}^3 = x^3 + t, \end{cases}$$

и группы Ли $G_3\,\overline{\underline{VI}}$ -

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 e^{-t} + s \\ \bar{x}^2 = x^2 e^{-2t} + l \\ \bar{x}^3 = x^3 + t \end{cases}$$

построить инвариантные порядки.

<u>Указание.</u> Порядки искать по аналогии с множествами (3.2) и (3.3).

<u>Пример 6.</u> Покажем, что биекция

$$f(x) = (ax^1, ax^2, x^3), \quad a = \text{const} \neq 0, \qquad (3.4)$$

является $\mathcal{P}$ - автоморфизмом для порядка (3.3).

<u>Решение.</u> Требуется показать, что

$$f(P_{(x^1,x^2,x^3)}) = P_{f(x^1,x^2,x^3)}.$$

Пусть $y \in P_x$ и $\bar{y} = f(y)$, $\bar{x} = f(x)$. Тогда

$$(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \bar{y}^3) = (ay^1, ay^2, y^3), \ (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) = (ax^1, ax^2, x^3).$$

Следовательно,

$$y^1 = a^{-1}\bar{y}^1, \quad y^2 = a^{-1}\bar{y}^2, \quad y^3 = \bar{y}^3,$$
$$x^1 = a^{-1}\bar{x}^1, \quad x^2 = a^{-1}\bar{x}^2, \quad x^3 = \bar{x}^3.$$

Поэтому условия

$$y^2 - x^2 \geq e^{x^3}(y^1 - x^1), \ y^2 \geq x^2, \ y^3 \geq x^3$$

того, что $y \in P_x$ переходят в условия

$$a^{-1}\bar{y}^2 - a^{-1}\bar{x}^2 \geq e^{\bar{x}^3}(a^{-1}\bar{y}^1 - a^{-1}\bar{x}^1), \ a^{-1}\bar{y}^2 \geq a^{-1}\bar{x}^2, \ \bar{y}^3 \geq \bar{x}^3$$

или

$$\bar{y}^2 - \bar{x}^2 \geq e^{\bar{x}^3}(\bar{y}^1 - \bar{x}^1), \ \bar{y}^2 \geq \bar{x}^2, \ \bar{y}^3 \geq x^3$$

принадлежности $\bar{y}$ множеству $P_{\bar{x}} = P_{f(x)}$ и обратно.

Задание. Показать, что

$$f(x) = (ax^1, bx^2, \frac{a}{b}x^3) \qquad (3.5)$$

есть $\mathcal{P}$ -автоморфизм для порядка (3.2). Будет ли (3.5) $\mathcal{P}$ -автоморфизмом для порядка (3.3) при $a \neq b$?

Нетрудно видеть, что множества (3.2) и (3.3) - это конусы, представляющие собой трехгранные углы. Возникает вопрос: можно ли брать в качестве множеств P_x , задающих порядок, эллиптические конусы?

Задача I4. Показать, что семейство равных и параллельных эллиптических конусов в A^3 может задавать порядок $\mathcal{P}$, инвариантный относительно группы Ли $G_3\,\mathrm{V}$.

Задача I5. Показать, что не существует порядка $\mathcal{P}$ в A^3, состоящего из эллиптических конусов и инвариантного относительно группы Гейзенберга $G_3\,\mathrm{II}$ (Н.Р. Абдрахимова, дипломная работа, ОмГУ, I987).

Пусть G_3 группа Ли преобразований, действующая просто транзитивно на A^3, а

$$\bar{x} = g(x, s, l, t)$$

или в координатах

$$\bar{x}^i = g^i(x, s, l, t) \quad (i = 1, 2, 3),$$

входящее в нее преобразование (см., например, (3.I)).

Если взять два преобразования

$$g \equiv g(x, s, l, t), \quad \bar{g} \equiv g(x, \bar{s}, \bar{l}, \bar{t}), \tag{3.6}$$

то их суперпозиция

$$\bar{g} \circ g \equiv g(g(x, s, l, t), \bar{s}, \bar{l}, \bar{t}) \tag{3.7}$$

есть в действительности преобразование

$$\tilde{g} \equiv g(x, \tilde{s}, \tilde{l}, \tilde{t}). \tag{3.8}$$

Ясно,

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{s} &= \tilde{s}(\bar{s}, \bar{l}, \bar{t}, s, l, t) \\ \tilde{l} &= \tilde{l}(\bar{s}, \bar{l}, \bar{t}, s, l, t) \\ \tilde{t} &= \tilde{t}(\bar{s}, \bar{l}, \bar{t}, s, l, t) \end{aligned} \right. \tag{3.9}$$

Функции (3.9) определяют **з а к о н   п е р е м н о ж е н и я** двух преобразований (3.6) группы Ли G_3.
Далее соотношения (3.9) будем записывать в виде

$$(\tilde{s}, \tilde{l}, \tilde{t}) = (\bar{s}, \bar{l}, \bar{t}) * (s, l, t).$$

Биекция $h: A^3 \to A^3$ называется автоморфизмом группы Ли G_3, если

$$\left. \begin{aligned} &h(0, 0, 0) = (0, 0, 0), \\ &h((\bar{s}, \bar{l}, \bar{t}) * (s, l, t)) = h(\bar{s}, \bar{l}, \bar{t}) * h(s, l, t) \end{aligned} \right\} \tag{3.10}$$

<u>Пример 7</u>. Найдем закон перемножения для $G_3\,\underline{III}$ и установим, что f из (3.4) является автоморфизмом группы.

Имеем

$$(x^1,x^2,x^3)\to g(g(x^1,x^2,x^3,s,l,t),\bar s,\bar l,\bar t)=$$

$$=((x^1e^{-t}+s)e^{-\bar t}+\bar s,\ (x^2+l)+\bar l,\ (x^3+t)+\bar t))=$$

$$=(x^1e^{-(\bar t+t)}+se^{-\bar t}+\bar s,\ x^2+\bar l+l,\ x^3+\bar t+t).$$

Следовательно,

$$\left\{\begin{aligned}\tilde s&=se^{-\bar t}+\bar s\\ \tilde l&=\bar l+l\\ \tilde t&=\bar t+t\end{aligned}\right.$$

или

$$(\bar s,\bar l,\bar t)*(s,l,t)=(se^{-\bar t}+\bar s,\ \bar l+l,\ \bar t+t).$$

Далее $f:(s,l,t)\to f(s,l,t)=(as,al,t)$,
$f:(\bar s,\bar l,\bar t)\to f(\bar s,\bar l,\bar t)=(a\bar s,a\bar l,\bar t)$,

$$f(\tilde s,\tilde l,\tilde t)=(a(se^{-\bar t}+\bar s),\ a(\bar l+l),\ \bar t+t),\qquad (3.11)$$

$$f(\bar s,\bar l,\bar t)*f(s,l,t)=((as)e^{-\bar t}+(a\bar s),\ (a\bar l)+(al),\ \bar t+t).\qquad (3.12)$$

Сравнивая (3.11) и (3.12), видим, что f – автоморфизм группы.

Задание. Найти закон перемножения для $G_{3\,\text{II}}$ и показать, что f из (3.5) является автоморфизмом группы.

Задача 16. Пусть h – автоморфизм группы Ли G_3. Тогда h порождает $\hat h: G_3\to G_3$, определяемое следующим образом:

$$\hat h(g(x,s,l,t))=g(x,h(s,l,t)).$$

Докажите, что

$$\hat h(\bar g\circ g)=\hat h(\bar g)\circ\hat h(g)\qquad (3.13)$$

(см. (3.6), (3.7)). Соотношение (3.13) разъясняет, почему h, удовлетворяющее (3.10), было названо автоморфизмом группы.

<u>Указание.</u> Использовать (3.8), являющееся сокращением записи (3.7).

ЗАДАНИЯ

1. Найти законы перемножения для групп Ли $G_3\overline{\underline{IV}}$, $G_3\overline{\underline{V}}$, $G_3\overline{\underline{VI}}$.

2. Для групп Ли $G_3\overline{\underline{III}}$, $G_3\overline{\underline{IV}}$, $G_3\overline{\underline{VI}}$ найти биекцию $f: A^3 \to A^3$ так, что f не является автоморфизмом группы.

3. Доказать, что

$$P_{(x^1,x^2,x^3)} = \{y \in A^3 : y^1 \geqslant 0, y^2 \geqslant 0, y^3 \geqslant x^3\} + \overrightarrow{(x^1, x^2, 0)}$$

задает порядок в A^3, инвариантный относительно групп Ли $G_3\overline{\underline{III}}$ и $G_3\overline{\underline{VI}}$.

4. Порядок $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^3\}$ в A^3 плотный, если для любых $x, y \in A^3$ таких, что $y \in P_x \setminus \{x\}$ следует

$$P_x \cap P_y^- \neq \{x, y\}.$$

Являются ли плотными порядки (3.2), (3.3) ?

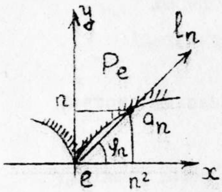
5.* * Доказать, что любой непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм f порядка (3.2) и порядка (3.3) имеет вид (3.5) и (3.4) соответственно, если выполнено условие: $f(0,0,0) = (0,0,0)$.

6. Проверить, что все рассмотренные выше группы Ли $G_3\overline{\underline{II}} - G_3\overline{\underline{VI}}$ действуют просто транзитивно на A^3.

7. Привести пример неплотного порядка в A^3, инвариантного относительно $G_3\overline{\underline{III}}$.

Решение задачи 10.

Нет. Рассмотрим порядок $\mathcal{P}$, для которого

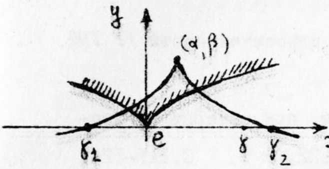


$$P_e = \{(x,y) \in A^2 : y \geq \sqrt{|x|}\},\ P_x = P_e + \vec{ex}.$$

Тогда $a_n = (n^2, n) \in P_e$, но луч l_n проходящий через e и a_n наклонен к оси x под углом $\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n^2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$.

Следовательно, $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть минимальный угол K, содержащий P_e с вершиной e совпадает с полуплоскостью $y \geq 0$ или $\measuredangle K = \pi$.

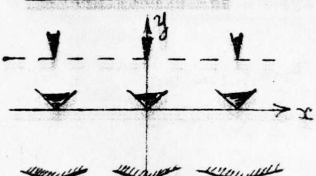
В то же время $P_e \cap P_x^-$ ограничено, ибо если $x = (\alpha, \beta)$, то существует $\gamma > 0$, что $\sqrt{\gamma} > \beta$.



Следовательно, $P_e \cap P_x^-$ лежит в полосе $\Pi_1 = \{(x,y) : 0 \leq y \leq \sqrt{\gamma}\}$.
С другой стороны, граница ∂P_x — это кривая $y - \beta = -\sqrt{|x-\alpha|}$ или $y = \beta - \sqrt{|x-\alpha|}$.

Поэтому она обязательно пересекает ось x в точках γ_1, γ_2, т.е. $P_e \cap P_x^-$ лежит в полосе $\Pi_2 = \{(x,y) : \gamma_1 \leq x \leq \gamma_2\}$.
В результате $P_e \cap P_x^- \subset \Pi_1 \cap \Pi_2$, т.е. $P_e \cap P_x^-$ — ограничено.

Решение задачи 12.



$$P_{(x,y)} = \{(u,v) : v \geq |u-x| e^y + y\}.$$

Возьмем

$$f(x,y) = (xe^{-1},\ y),$$
$$g(x,y) = (x+1,\ y).$$

Ясно, $f, g \in G$ и $(f \circ g)(P_{(0,0)}) \neq (g \circ f)(P_{(0,0)})$.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

К теме I.

I. Ф у к с Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.

2. Droste M. Structure of partially ordered sets with transitive automorphism groups // Memoirs of AMS. 1985. V. 57. № 334. P. 1-100.

К теме 2.

I. Г у ц А.К. Аксиоматическая теория относительности // УМН. 1982. Т. 37. № 2. С.39-79.

2. Л е в и ч е в А.В. Некоторые условия, при которых предпорядок задается конусом // СМЖ. 1981. Т.22. № 5. С.116-126.

3. Л е в и ч е в А.В. О связном предпорядке //Докл. АН СССР. 1977. Т.235. № 6. С.1256-1259.

К теме 3.

I. П о н т р я г и н Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука. 1973.

2. Montgomery D., Zippin L. Topological transformation groups. New York: Interscience Publishers, 1955.

Александр Константинович Гуц

СТРУКТУРЫ ПОРЯДКА НА РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ

Задания и методические указания
к их выполнению для студентов Ш-IУ курсов
математического факультета

Редактор Л.Ф. Платоненко

Подписано в печать 25.09.88 г. Формат бумаги 60х84/16
Печ.л. 1,4. Уч.-изд.л. 1,3. Тираж 100.
Заказ 332. Бесплатно

Редакционно-издательская группа ОмГУ
Полиграфическая лаборатория
644077, Омск-77, пр. Мира 55-а, госуниверситет