6. Ford L. H.//Phys. Rev.: D. — 1975. — V. 12. — P. 2963.
7. Iyer B. R., Kumar A.//Pramana. — 1977. — V. 8. — P. 500.

Кишиневский политехнический институт
Московский госуниверситет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 03.03.86.

УДК 530.12 : 531.51

А. К. ГУЦ, Г. Б. ФИШКИНА

ДИНАМИКА СИММЕТРИЙ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ЭКВИВАРИАНТНЫХ БОРДИЗМОВ

Исследуется вопрос о происхождении однородности и изотропности Вселенной на основе теории эквивариантных бордизмов.

Реальное физическое пространство, точнее его геометрия, обладает рядом симметрий (перемещение, вращение, отражение). Общая теория относительности породила представление о меняющейся с течением времени геометрии пространства. Следовательно, можно говорить о динамике пространственных симметрий. Поскольку пространство только «тень четырехмерного пространства-времени», то это утверждение Минковского, будучи распространенным на симметрии пространства, должно означать, что пространственные симметрии лишь одно из проявлений симметрий пространства-времени. Другими словами, если G — группа симметрий пространства-времени, то ограничение ее действия на пространственноподобных сечениях и есть пространственные симметрии. Такой подход к проблеме симметрий пространства приводит с необходимостью к математической теории G-многообразий, т. е. многообразий с действием группы G [1]. Здесь уместно напомнить, что любое риманово многообразие с группой симметрий (изометрий) G является G-многообразием. Одновременно вопрос о динамике пространственных симметрий решается на основе теории эквивариантных бордизмов или G-бордизмов [2, 3]. Ниже будет показано, как с помощью этих теорий решается вопрос о приобретении в ходе эволюции Вселенной пространством таких важных свойств, как однородность и изотропность.

1. Пусть G — группа и M^n—n-мерное гладкое ориентированное многообразие. Пусть $G \to \mathrm{Diff}_+(M^n)$ — гомоморфизм, где $\mathrm{Diff}_+(M^n)$ — группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов многообразия M^n. Тогда говорят, что M^n есть G-многообразие и что G действует на M^n. Образ элемента $g \in G$ при $G \to \mathrm{Diff}_+(M^n)$ обозначим через g и пишем $g(x)$ для образа точки $x \in M^n$ при действии на нее элементом g. Если G — группа Ли, то добавочно требуем, чтобы отображение $G \times M^n \to M^n$, $(g, x) \to g(x)$ из нашего определения действия было гладким.

Будем обозначать G-многообразие M^n с фиксированным действием группы G через $<G, M^n>$. Два G-многообразия $<G, M_1^n>$, $<G, M_2^n>$ эквивалентны, если существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\varphi : M_1^n \to M_2^n$, являющийся эквивариантным отображением, т. е. $\varphi(g(x)) = g(\varphi(x))$ для всех $g \in G$, $x \in M_1^n$.

Пусть $<G, M^n>$ — ориентируемое замкнутое, т. е. компактное без края G-многообразие. Оно бордантно нулю, если найдется компактное ориентированное G-многообразие $<G, V^{n+1}>$, для которого $<G, \partial V^{n+1}>$ эквивалентно $<G, M^n>$. Здесь ∂V^{n+1} — край многообразия V^{n+1}. Для двух G-многообразий $<G, M_1^n>$, $<G, M_2^n>$ существует обычное несвязное объединение $<G, M_1^n \cup M_2^n>$. Пусть

$-\langle G, M^n\rangle = \langle G, -M^n\rangle$, где $-M^n$ — многообразие M^n, взятое с противоположной ориентацией. Пара $\langle G, M_1^n\rangle$ бордантна паре $\langle G, M_2^n\rangle$, если несвязное объединение $\langle G, M_1^n \cup (-M_2^n)\rangle$ бордантно нулю.

Отношение эквивариантной бордантности является отношением эквивалентности на множестве всех замкнутых ориентированных n-мерных многообразий [2]. Обозначим класс бордизмов G-многообразия $\langle G, M^n\rangle$ через $[G, M^n]$, а совокупность всех таких классов через $\Omega_n(G)$. Несвязное объединение G-многообразий индуцирует в $\Omega_n(G)$ структуру абелевой группы. Если во всех определениях опустить требование ориентируемости многообразий, то имеют группу неориентируемых n-мерных бордизмов $N_n(G)$.

2. Два бордантных G-многообразия $\langle G, M_1^3\rangle$ и $\langle G, M_2^3\rangle$ трактуем как начальное и конечное состояния эволюции группы симметрий G физического пространства. Отсутствие симметрий G — это тривиальность действия группы G, т. е. гомоморфизм $G \to \mathrm{Diff}_+(M_1^3)$ тривиален. Соответственно рождение симметрии означает, что действие группы G в M_2^3 нетривиально. Аналогично понимается нарушение симметрий G. В этом случае конечное G-многообразие $\langle G, M_2^3\rangle$ обладает тривиальным действием группы G. Бордизм $\langle G, V^4\rangle$, край которого $\partial V^4 = M_1^3 \cup (-M_2^3)$, — это пространство-время, начальным и конечным пространственноподобными сечениями которого должны быть M_1^3 и M_2^3. Действительно, бордизм (пленка) $\langle G, V^4\rangle$ оснащается лоренцевой метрикой вида [4, 5]:

$$g_{ik} = \gamma_{ik} - a \cdot \omega_i \otimes \omega_k, \tag{1}$$

где γ — некоторая риманова метрика, а ω — 1-форма, для которой M_1^3 и M_2^3 — это пространственноподобные трехмерные поверхности. Риманову метрику γ можно взять так, чтобы группа G была ее группой симметрий (изометрий) [1, с. 294]. Если многообразие V^4 допускает пространственно-временное слоение [5] такое, что слои — суть орбиты группы, а M_1^3, M_2^3 также слои, то можно считать, что данное слоение порождено 1-формой ω. Но тогда ω инвариантна относительно действия группы G и, следовательно, метрика g допускает группу симметрий G. Пространство-время $\langle V^4, g\rangle$ становится симметричным относительно группы G, впрочем также, как и $\langle M_1^3, g|M_1^3\rangle$, $\langle M_2^3, g|M_2^3\rangle$, где $g|M_i^3$ — риманова метрика на M_i^3, индуцированная лоренцевой метрикой g. Более того, коль скоро M_i^3 $(i=1, 2)$ — орбиты группы G, то это означает однородность соответствующего физического пространства.

Описанный выше бордизм $\langle G, V^4\rangle$ с симметричной относительно G лоренцевой метрикой g назовем лоренцевым эквивариантным бордизмом или лоренцевым G-бордизмом. Хотя пространство в случае лоренцева G-бордизма однородно (относительно G), остаются многие другие проблемы, связанные с динамикой симметрий. Это, например, проблема изотропности пространства. Конечное G-многообразие $\langle G, M_2^3\rangle$ должно в таком случае обладать таким действием группы G, что стабилизатор G_x группы G в каждой точке $x \in M_2^3$ изоморфен группе $SO(3)$. Понятно, этим свойством не обязано обладать начальное состояние $\langle G, M_1^3\rangle$. Решить данную проблему чисто математическим путем можно, если вычислить класс $[G, M_2^3]$. В случае, когда $\langle G, M_1^3\rangle \in [G, M_2^3]$, следует сказать, что изотропия неизбежно возникает из начального состояния $\langle G, M_1^3\rangle$. Более того, если $\Omega_3(G)=0$, то изотропность возникает из любого начального состояния. Если же $\Omega_3(G)\neq 0$, то изотропия порождается далеко не из каждого начального состояния, и знание элементов группы $\Omega_3(G)$ — это знание путей эволюции симметрий начальных состояний, равно как и определение прошлого (настоящих) симметричных состояний.

При $\Omega_3(G)\neq 0$ следует говорить о конкретном типе топологии и симметрии исходного состояния Вселенной, а также о допустимых типах топологических перестроек, происходящих с пространством в ходе развития Вселенной. Наконец, если для G-многообразий $<G, M_1^3>$, $<G, M_2^3>$ лоренцева G-бордизма нет, но возможен G-бордизм $<G, V^4>$, то предполагая, что M_2^3 — орбита группы G, а M_1^3 этим свойством не обладает, мы заключаем, что бордизм $<G, V^4>$ — это динамика рождающегося однородного физического пространства.

3. Сказанное показывает, какое фундаментальное значение имеет вычисление групп 3-мерных G-бордизмов. К сожалению, в литературе содержится мало сведений об $\Omega_3(G)$, особенно для тех случаев, когда G не является конечной группой. Нам, тем не менее, удалось найти ряд результатов, которые позволяют ответить на ряд вопросов, освещенных выше.

Существует ([7]; [2, теорема 14.2]) полезная формула для случая свободного действия группы G:

$$\Omega_n^{\text{free}}(G)\cong\Omega_{n-\kappa}(BG)\cong\sum_{p+q=n-\kappa}H_p(BG;\ \Omega_q)\operatorname{mod}C, \tag{2}$$

где κ — размерность группы G; BG — классифицирующее пространство для G; Ω_q—q-мерная группа бордизмов Тома [7]; C — класс конечных групп нечетного порядка; $H_p(A, F)$—p-мерная группа гомологий с коэффициентами в группе F.

3.1. Однородность пространства. Мы должны здесь предполагать, что G действует транзитивно на M_2^3. Но тогда $\dim G\geqslant 3$. Если $G=M_2^3$ т. е. M_2^3 есть компактная группа Ли, действующая на себе левыми сдвигами, то $\Omega_3(G)=0$ [6]. Следовательно, однородность физического пространства (группового пространства; например, сферы S^3 или тора $S^1\times S^1\times S^1$) возникает из произвольного, возможно полностью несимметричного, начального состояния $<G, M_1^3>$.

Если G действует свободно на 3-многообразии M_2^3, то из (2) получаем

$$\Omega_3^{\text{free}}(G)\cong H_0(BG;\ \Omega_0).$$

Так как $\Omega_0\cong Z$, то $H_0(BG; Z)\cong Z$, и, следовательно, $\Omega_3^{\text{free}}(G)=Z$. Поэтому свободная симметрия возникает не из каждой свободной, если соответствующая пленка V^4 не имеет неподвижных точек при действии группы G.

3.2. Изотропность пространства. Для полусвободного действия группы S^3 (т. е. стабилизатор в любой точке либо тривиален, либо совпадает со всей группой S^3) известно, что $\Omega_3^{\text{sfree}}(S^3)=0$ [6]. Поскольку $S^3\cong SU(2)$, а $SU(2)$ локально изоморфна $SO(3)$, то тривиальность группы $\Omega_3^{\text{sfree}}(S^3)$ означает возможность зарождения изотропии пространства из любого начального состояния. Перечисление многообразий M^3 с полусвободным действием S^3 — это исследование топологических типов изотропного физического пространства.

3.3. Аксиальная симметрия. Зарождение цилиндрической симметрии из произвольного начального состояния возможно в силу того, что $\Omega_3^{\text{sfree}}(S^1)=0$ при полусвободном действии S^1 на M_2^3 [7]. В случае свободного действия S^1 известно [8], что $[S^1, M_2^3]=0$ в $N_3(S^1)$.

Связное компактное S^1-многообразие называется многообразием Зейферта. Они широко изучались [9, 10] и были классифицированы. С их помощью строятся общие 3-многообразия [11].

3.4. Дискретные симметрии. Они являются наиболее изученными в математической литературе. Например, $\Omega_3(Z_2)=0$ [12]. Поскольку Z_2 — действие на M^3 — это инволюция $P\colon\ M^3\to M^3$, $P^2=\mathrm{id}_{M^3}$, т. е. повторное применение P дает тождественное преобразование, то под Z_2-действие попадает такая симметрия, как четность. Следовательно, если в ходе топологической перестройки геометрия 3-пространства теряет четность, то она способна восстановиться через некоторое время. Действие Z_2 на V^4 можно рассматривать как PT-симметрию (если только γ_{ik} и ω Z_2-симметричны, см. (1)). Интересно отметить, что $\Omega_4(Z_2)=Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z_2$ (см. [12]), т. е. PT-симметрия — «тень» четырех различных типов 5-симметрий. Для конечных групп лоренцевы G-бордизмы изучены в [13]. Группы $\Omega_n(G)$, где G — конечная подгруппа $SU(2)$, найдены в [14].

3.5. Внутренние симметрии. Рождение внутренних симметрий физических полей при условии неизменности пространства-времени. по-видимому, следует из работы [6], где показано, что пространство главного G-расслоения над замкнутым гладким многообразием бордантно нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
2. Коннер П., Флойд Э. Гладкие периодические отображения. — М.: Мир, 1969.
3. Гуц А. К.//Тез. 6-й Сов. грав. конф. — М.: Изд-во УДН, 1984.
4. Yodzis P.//Commun. Math. Phys. — 1972. — V. 26. — P. 39.
5. Янчевский В. П.//Изв. вузов. Физика. — 1985. — № 4. — С. 41.
6. Cacciafesta F.//Atti Acad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis., Math. e. Natur. — 1973. — V. 54. — № 5. — P. 750.
7. Uchida F.//Osaka J. Math. — 1970. — V. 7. — № 2. — P. 345.
8. Stong R. E.//Math. Ann. — 1977. — V. 226. — № 2. — P. 151.
9. Orlik P. Seifert Manifolds. Lectures Notes in Math., 1972, № 291.
10. Seifert H.//Acta Math. — 1933. — V. 60. — P. 147.
11. Jaco W., Shalen P. Mem. of AMS. 1979, № 220.
12. Kosniowski C., Ossa E.//Proc. London Math. Soc. — 1982. — V. 44. — P. 267.
13. Heithecher J.//Math. Ann. — 1978. — V. 234. — № 1. — P. 1.
14. Katsube Y.//Hiroshima Math. J. — 1977. — V. 7. — № 1. — P. 71.

Омский госуниверситет

Поступила в редакцию 10.03.86.

УДК 530.12.531.551

В. Г. БАГРОВ, В. В. ОБУХОВ, К. Е. ОСЕТРИН

ШТЕККЕЛЕВЫ ПРОСТРАНСТВА ЭЛЕКТРОВАКУУМА С ИЗОТРОПНЫМИ ПОЛНЫМИ НАБОРАМИ ТИПА (1.1.)

В работе проведена полная классификация штеккелевых пространств электровакуума, допускающих одно изотропное векторное поле Киллинга и два тензорных поля Киллинга. Все найденные решения уравнений Эйнштейна—Максвелла относятся к типу N по Петрову.

Предлагаемая работа является продолжением статей [1, 2]. Напомним постановку задачи. Пусть в некотором римановом пространстве с сигнатурой (1, —1, —1, —1) уравнения геодезических интегрируются методом полного разделения переменных в уравнении Гамильтона—Якоби:

$$g^{ij}S_{,i}S_{,j}-m^2=0, \quad i, j=0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

Если g^{ij} является решением системы самосогласованных уравнений Эйнштейна—Максвелла с космологическим членом