

А. К. Гуц

НАРУШЕНИЕ СВЯЗНОСТИ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Определяются условия, при которых физическое пространство изменяет число связных компонент.

В этой заметке мы определяем условия, при которых физическое пространство изменяет свою топологию, точнее, становится несвязным. Для замкнутой вселенной вопрос исследовался в [1].

Пусть M — связное трехмерное риманово многообразие с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}^0$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), $D_0 \subset M$ — замкнутая область, гомеоморфная трехмерному шару. Допустим, что с течением времени $t \in [0, 1]$ многообразие $M_0 = M(t=0)$ увеличивает число компонент связности, превращаясь в многообразие $M_1(t=1)$, которое уже несвязно. Если говорить образно, то от M_0 отрывается область D_0 . Чтобы не усложнять изложение, примем, что M_1 имеет две компоненты связности D_1 и C_1 , т.е. $M_1 = D_1 \cup C_1$, $D_1 \cap C_1 = \emptyset$. Переход от M_0 к M_1 осуществляется через некоторое критическое 3-пространство $M_{1/2}(t=1/2)$, которое получается из M_0 стягиванием границы ∂D_0 области D_0 в точку. Тогда D_0 превращается в область $D_{1/2}$, гомеоморфную трехмерной сфере S^3 . Следовательно, необходимым этапом на пути к отрыву D_0 от M_0 является перетяжка M_0 по ∂D_0 — переход от M_0 к $M_{1/2}$. Если $F_0 \subset M_0$ — произвольное замкнутое двумерное подмногообразие, пересекающее D_0 по B_0 , причем B_0 гомеоморфно двумерному шару,

то при $t = 1/2$ граница ∂B_0 уже стянута в точку, а при $t = 1$ область B_0 оторвана от F_0 . Поэтому предварительно изучим нарушение связности двумерного многообразия F_0 . Многообразие или пространство, полученное из F_0 к моменту t , будем обозначать через F_t .

Осуществим отрывание B_0 от F_0 следующим образом. Рассмотрим семейство римановых метрик $a_{AB}(t)$, $t \in [0, 1]$, $A, B = 1, 2$, заданных на многообразии F_0 , удовлетворяющее условиям:

1) $a_{AB}(t)$ при $0 \leq t < 1/2$ принадлежит классу C^2 , и при $t \geq 1/2$ функции $a_{AB}(t)$ имеют разрывы производных первого рода на ∂B_0 ;

2) длина кривой ∂B_0 , вычисленная в метрике $a_{AB}(t)$, $t < 1/2$, стремится к нулю при $t \rightarrow 1/2$, или, иначе,

$$d\sigma_t|_{\partial B_0} \xrightarrow{t \rightarrow 1/2-0} 0 \text{ и } d\sigma_t|_{\partial B_0} = 0 \text{ при } t \geq 1/2,$$

где $d\sigma_t$ — элемент площади в метрике $a_{AB}(t)$;

3) римановы пространства $F_0 \setminus (B_0 \cup \partial B_0)$, $B_0 \setminus \partial B_0$, с индуцированной метрикой $a_{AB}(t)$, $t \geq 1/2$, дополненные "точкой" ∂B_0 , представляют собой замкнутые ориентированные многообразия. Обозначим их соответственно через A_t, B_t

Разъясним метрические условия 1–3. Переход от F_0 к F_1 через $F_{1/2}$ мы изображаем на одном и том же множестве точек F_0 . Для этого на F_0 вводится семейство топологий T_t , $t \in [0, 1]$, причем каждая топология T_t согласована с топологией, порождаемой метрикой $a_{AB}(t)$. Следовательно, пространство F_t как множество равно F_0 , но имеет, вообще говоря, иную топологию. Символически можно написать $F_t = \langle F_0, T_t \rangle$, в частности $B_t = \langle B_0, T_t \rangle$, имея в виду индуцированную топологию на B_t . В топологии $T_{1/2}$ кривая ∂B_0 есть точка, в то

время как вычисление границы $\partial_{1/2}B_{1/2}$ в топологии $T_{1/2}$ множества $B_{1/2}$ дает \emptyset , т.е. $\partial_{1/2}B_{1/2} = \partial_{1/2} \langle B_0, T_{1/2} \rangle = \emptyset$, ибо $B_{1/2} = \langle B_0, T_{1/2} \rangle$ уже гомеоморфно сфере S^2 . Таким образом, условие 2 означает стягивание ∂B_0 в точку. Пространство $F_{1/2}$ является критическим; оно состоит из двух многообразий $A_{1/2}$ и $B_{1/2}$, имеющих общую точку $\langle \partial B_0, T_{1/2} \rangle$. При $t > 1/2$ многообразия A_t, B_t изображают различные компоненты связности разорванного F_0 (точка $\langle \partial B_0, T_{1/2} \rangle$ уже изображает две различные точки). В этом нет ничего противоземного, так как компоненты связности в действительности диффеоморфны (и изометричны) A_t, B_t соответственно. Наше построение не столь удобно, как лоренцев кобордизм [2] между F_0 и F_1 , но зато приспособлено для сравнения интегралов, взятых по $F_t, t < 1/2$ и $F_s, s > 1/2$, которое предстоит сделать ниже.

Проделанные построения позволяют говорить о топологической метаморфозе многообразия F_0 благодаря применению теоремы Гаусса-Бонне. Последняя гласит, что для двумерного замкнутого ориентированного риманова многообразия F класса C^2

$$\int_F \Gamma d\sigma = 2\pi\chi(F),$$

где Γ — гауссова кривизна; $\chi(F)$ — характеристика Эйлера-Пуанкаре.

Следовательно, при $0 \leq t < 1/2$

$$\int_{F_0} \Gamma_t d\sigma_t = 2\pi\chi(F_0) \quad (1)$$

и при $s > 1/2$

$$\int_{A_s} \Gamma_s d\sigma_s = 2\pi\chi(A_s), \quad \int_{B_s} \Gamma_s d\sigma_s = 2\pi\chi(B_s), \quad (2)$$

где $\Gamma_t, d\sigma_t$ — соответственно гауссова кривизна и элемент площади в метрике $a_{AB}(t)$. Пусть F_0 гомеоморфно сфере S^2 . Тогда $\chi(F_0) = \chi(A_s) = \chi(B_s) = 2$. Обратим внимание на то, что равенства (2) получены благодаря условию 1, т.е. за счет потери гладкости метрики $a_{AB}(t)$ на ∂B_0 .

Пусть V — малая окрестность кривой ∂B_0 (в топологии T_0). Будем считать, что $a_{AB}(t) = a_{AB}(0)$ вне \bar{V} . Тогда из (1), (2) следует

$$\left(\int_{V \cap B_s} + \int_{V \cap A_s} \right) \Gamma_s d\sigma_s - \int_V \Gamma_t d\sigma_t = 4\pi, \quad \text{где } t < 1/2, \quad 1/2 < s$$

или

$$\int_V \left(\Gamma_s \frac{d\sigma_s}{d\sigma_t} - \Gamma_t \right) d\sigma_t = 4\pi. \quad (3)$$

Так как $d\sigma_s = 0$ на ∂B_0 , то из (3) получаем, что существует окрестность $W \subset V$, в которой $\Gamma_s \gg \Gamma_t$. Значит отрыв B_0 от F_0 означает резкое возрастание кривизны.

Возвращаясь теперь к нарушению связности физического пространства M_0 , заключаем, что отрывание D_0 от M_0 характеризуется скачком гауссовой кривизны в некоторой окрестности U "сферы" ∂D_0 у любого двумерного замкнутого многообразия F_0 , пересекающего D_0 . Отсюда можно сделать вывод о скачке скалярной кривизны ${}^{(3)}R$ многообразия M_0 в некоторой окрестности $U \supset \partial D_0$. В самом деле, ${}^{(3)}R = 2\Gamma + \alpha$, где Γ — гауссова кривизна сечения F_0 , а α — инвариант его внешней кривизны (формула Гаусса–Кодацци). Сечение можно выбрать так, что $\alpha = 0$ (например, сечения $\theta = \text{const}$ или $\varphi = \text{const}$ замкнутой вселенной Фридмана). Поэтому скачок $\delta\Gamma$ кривизны Γ влечет скачок $\delta{}^{(3)}R$ кривизны ${}^{(3)}R$.

На множестве событий $M_0 \times [0, 1]$ рассмотрим пространст-

венно-временную метрику

$$ds^2 = (N^2 - N_\alpha N^\alpha)dt^2 - 2N_\alpha dt dx^\alpha - \gamma_{\alpha\beta}(x, t)dx^\alpha dx^\beta,$$

удовлетворяющую условиям:

а) $t=\text{const}$ есть пространственно-подобное сечение с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}(x, t)$;

б) $\partial\gamma_{\alpha\beta}/\partial n$, где n — нормаль к сечению $t=\text{const}$, непрерывны;

в) $\gamma_{\alpha\beta}(x, t) = \gamma_{\alpha\beta}^0$ вне некоторой окрестности U области D_0 в топологии многообразия M_0 ;

г) индуцированные на двумерных сечениях F_0 метрики $a_{AB}(t)$ (они индуцируются метриками $\gamma_{\alpha\beta}(x, t)$) удовлетворяют условиям 1–3 и $d\sigma_s/d\sigma_t \leq 1$ при $t < 1/2$, $s > 1/2$ в U ;

д) гауссова кривизна Γ_s сечения F_0 в метрике $a_{AB}(s)$ неотрицательна ($s > 1/2$).

Из (3), "в" — "д" следует

$$\int_{U \cap F_0} \Gamma_s d\sigma_t \geq 4\pi + \int_{U \cap F_0} \Gamma_t d\sigma_t, \quad t < 1/2, \quad 1/2 < s$$

или

$$\langle \delta\Gamma \rangle \cdot \sigma_t(U \cap F_0) \geq 4\pi, \quad (4)$$

где

$$\delta\Gamma = \Gamma_s - \Gamma_t,$$

$\sigma_t(A)$ — площадь области $A \subset F_0$ в метрике $a_{AB}(t)$,

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\sigma_t(A)} \int_A f d\sigma_t -$$

интегральное среднее величины f .

Динамика 3-геометрии описывается уравнениями Эйнштейна, из которых следует ([3], с. 157)

$${}^{(3)}R_t + K_{2,t} = \frac{16\pi G}{c^4} \varepsilon(t), \quad t \in [0, 1]; \quad (5)$$

$$K_{2,t} = (K_{\alpha}^{\cdot\alpha}(t))^2 - K_{\alpha\beta}(t)K^{\alpha\beta}(t),$$

где $K_{\alpha\beta}(t)$ — тензор внешней кривизны сечения $t = \text{const}$.

Тогда

$$\langle \delta^{(3)}R \rangle + \langle \delta K_2 \rangle = \frac{16\pi G}{c^4} \langle \delta\varepsilon \rangle, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}R &= {}^{(3)}R_s - {}^{(3)}R_t, \quad \delta K_2 = K_{2,s} - K_{2,t}, \quad \delta\varepsilon = \varepsilon(s) - \varepsilon(t), \\ t &< 1/2, \quad 1/2 < s. \end{aligned}$$

Но как показывалось выше,

$$\langle \delta^{(3)}R \rangle \sim 2 \langle \delta\Gamma \rangle, \quad (7)$$

где Γ — гауссова кривизна двумерного сечения F_0 . В то же время, благодаря условию "б", внешняя кривизна $K_{2,t}$ будет непрерывной функцией на $M_0 \times [0, 1]$. Следовательно

$$\langle \delta K_2 \rangle = (K_{2,s} - K_{2,t})|_{x=x_0(t,s)} \xrightarrow[t \rightarrow 1/2-0]{s \rightarrow 1/2+0} 0 \quad (8)$$

Поэтому для некоторых $t_0 < 1/2$ и $1/2 < s_0$ величина $\langle \delta K_2 \rangle$ пренебрежимо мала, и тогда из (4)–(8) получаем

$$\langle \delta\varepsilon \rangle \gtrsim \frac{c^4}{2\pi G} \frac{1}{\sigma_{t_0}(U \cap F_0)}.$$

Вполне позволительно теперь написать

$$\langle \delta\varepsilon \rangle \gtrsim \frac{c^4}{2\pi G} \frac{1}{\sigma}, \quad (9)$$

где σ — характерное сечение области D_0 .

Формула (9) дает нам среднее значение скачка плотности энергии, который обеспечивает отрыв области D_0 .

Из (9) получаем следующие оценки:

- 1) при $\sigma \sim 10^{202}$ (Солнце), $\langle \delta\rho \rangle = \langle \delta\varepsilon \rangle / c^2 \sim 10^7/3$;
- 2) $\sigma \sim 10^{122}$ (нейтронная звезда), $\langle \delta\rho \rangle \sim 10^{15}/3$;
- 3) $\sigma \sim 10^{-662}$ (сингулярность), $\langle \delta\rho \rangle \sim 10^{93}/3$.

Таким образом, отрыву малых областей препятствует мощный потенциальный барьер. Искусственное перемещение в пространстве за счет изменения топологии самого пространства потребует огромных энергетических затрат. Сверхплотные конфигурации близки по своим параметрам к тому, чтобы оторваться от пространства. Тем самым подтверждаются выводы, сделанные нами в [1] в случае замкнутой модели вселенной. Следует ожидать, что нарушение связности происходит при гравитационном коллапсе массивных звезд, ибо при этом возникают сингулярности (на основании теоремы Пенроуза [4], с. 242), влекущие сингулярность кривизны. Нетрудно заметить, что картина нарушения связности, описываемая нами, во многом сходна с процессом гравитационного самозамыкания, сопровождающего гравитационный коллапс однородных сферически-симметричных конфигураций, столь подробно разбираемым в ([5], с. 52). Поэтому можно ожидать, что образование сингулярностей происходит вследствие нарушения связности 3-пространства.

Список литературы

- [1] Г у ц А. К. Изв. вузов, Физика, 1982, **5**, 23.
- [2] P. U o d z i s. Gen. Relat. and Gravit., 1973 **4**, 299.
- [3] Ч. М и з н е р, К. Т о р н, Д ж. У и л е р. Гравитация, **2**, М., Мир, 1977.

- [4] Х о к и н г С., Э л л и с Д ж. Крупномасштабная структура пространства-времени, М., Мир, 1977.
- [5] Ч. М и з н е р, К. Т о р н, Д ж. У и л е р. Гравитация, **3**, М., Мир, 1977.