Известия вузов. Физика. 1982. N.5. C.23-26.

А. К. Гуц

ИЗМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИИ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА В ЗАМКНУТОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Определяются условия, при которых физическое пространство изменяет число связных компонент.

Классическое представление о физическом пространстве наделяет его таким фундаментальным топологическим свойством как связность. Физическое пространство — суть трехмерное связное многообразие — объединяется с временем в единое четырехмерное пространство-время. Если теперь рассмотреть модель связного, но не односвязного пространства-времени, то вполне можно обнаружить несвязные трехмерные пространственно-подобные сечения. Более того, несвязное сечение M_1 может получиться из связного M_0 с помощью сферической перестройки [1], и, следовательно, связное и несвязное сечения можно рассматривать как начальное и конечное состояния некоторого геометродинамического процесса (лоренцев кобордизм, см.[1]). В ходе этого процесса 3-геометрия претерпевает переход через некоторое критическое состояние $M_{1/2}$, которое отвечает нарушению связности пространственно-подобного сечения.

Было бы интересно выяснить [1], при каких условиях происходит нарушение связности пространственно-подобных сечений, или, если оставить в стороне конкретную дифференциально-топологическую модель, выяснить — возможно ли, что в ходе некоторого физического процесса трехмерное пространство M_0 становится несвязным. Допуская вольность в словах, можно сказать, что нарушение связности означает отрывание области D_0 от M_0.

Переход от M_0 к M_1 можно осуществить, стягивая в точку α^* границу ∂D_0 замкнутой области $D_0 \subset M_0$. Получается пространство $M_{1/2} = C_{1/2} \cup D_{1/2}$, где $C_{1/2}$ и $D_{1/2}$ имеют одну общую точку α^* (результат стягивания ∂D_0) и является связными гладкими многообразиями, диффеоморфными связными компонентами пространства M_1. Затем идет отрыв $C_{1/2}$ от $D_{1/2}$; получаем M_1.

Геометрически нарушение связности можно охарактеризовать как процесс уменьшения до нуля площади поверхности ∂D_0, ограничивающей отрывающуюся область D_0. Значит, связность пространства нарушается вследствие возмущения метрики $\gamma_{\alpha\beta} \to \gamma_{\alpha\beta} + \delta\gamma_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$. Локальное возмущение метрики ведет к изменению кривизны 3-пространства.В рамках общей теории относительности 3-пространство рассматривается как пространственно-подобное сечение пространства-времени. Поэтому следуют исходить из возмущения 4-метрики g_{ik} $(i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ пространства-времени, индуцирующего возмущение метрики $\gamma_{\alpha\beta}$ 3-пространства. Согласно уравнениям Эйнштейна, исходной причиной возмущения метрики является появление дополнительного локального энергетического источника. Необходимые затраты энергии, влекущие нарушение связности 3-пространства, можно было бы легко подсчитать, если бы имелась формула, связывающая некоторую числовую характеристику связности пространства с кривизной этого пространства.

В случае замкнутого 3-пространства M такой числовой характеристикой является нульмерное число Бетти $\beta_0(M)$ [2]. Необходимая же формула также имеется, правда, лишь для частного случая замкнутого ориентированного риманова 3-пространства M с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$, допускающего регулярное единичное киллингово векторное поле ξ [3]:

$$\frac{1}{2\pi l(\xi)}\int\limits_M \{K(\xi^{\perp}) + 3K(\xi)\}dv = 2\beta_0(M) - \beta_1(M) + d_0, \qquad (1)$$

где $d_0 = 0$ или 1 в зависимости от четности или нечетности одномерного числа Бетти $\beta_1(M)$; $K(\xi^{\perp})$ — значение римановой кривизны в плоскости, ортогональной ξ; $K(\xi)$ — значение римановой кривизны для любой плоскости, содержащей ξ (отметим, что $K(\xi)$ не зависит от выбора плоскости); dv — форма объема; $l(\xi)$ — длина интегральной траектории поля ξ (она постоянна).

Осуществим отрывание области D_0 следующим образом. На 3-многообразии M_0 зададим семейство римановых метрик $\gamma_{\alpha\beta}(t)$, $t\in[0,1]$, удовлетворяющее условиям:

а) $\gamma_{\alpha\beta}(t)$ при $0 \leq t < 1/2$ C^2-гладкое тензорное поле, а при $t \geq 1/2$ оно имеет разрывы производных первого рода на границе ∂D_0 замкнутой области D_0;

б) (стягивание ∂D_0 в точку α^*) площадь σ_t границы ∂D_0, вычисленная в метрике $\gamma_{\alpha\beta}(t)$, стремится к нулю при $t \to 1/2 - 0$, или, иначе,

$$dv_t|_{\partial D_0} \xrightarrow[t\to 1/2-0]{} 0 \text{ и } \quad dv_t|_{\partial D_0} = 0 \quad \text{при} \quad t \geq 1/2.$$

где dv_t — форма объема в метрике $\gamma_{\alpha\beta}(t)$; $dv_s/dv_t \leq 1$ на M_0, $t < \frac{1}{2} < s$;

в) пространство $<M_0, \gamma_{\alpha\beta}(0)>$, т.е. M_0 с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}(0)$ является связным C^2-гладким римановым многообразием, а

$C_t \equiv (M_0 \setminus D_0) \cup \{\alpha^*\}$ и $D_t \equiv D_0 \cup \{\alpha^*\}$ с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}(t)$, $t \geq 1/2$ и дополненные точкой α^* представляют собой C^2-гладкие связные римановы замкнутые многообразия;

г) $\partial\gamma_{\alpha\beta}/\partial n$, где n — нормаль к пространству $<M_0, \gamma_{\alpha\beta}(t)>$, непрерывны;

д) $\gamma_{\alpha\beta}(t) = \gamma_{\alpha\beta}(0)$ вне окрестности O_ε области D_0;

е) пространство $<M_0, \gamma_{\alpha\beta}(t)>$, $t > 1/2$ имеет неотрицательную кривизну;

ж) пространство $<M_0, \gamma_{\alpha\beta}(t)>$, $t \in [0, 1]$, допускает регулярное единичное киллингово поле ξ_t.

Последнее предположение самое неприятное, так как в ходе отрыва D_0 от M_0 симметрия 3-пространства, по-видимому, может исчезнуть при приближении к критическому значению $t = 1/2$. Но понимая это, мы вынуждены вводить условие $<$ж$>$ для того, чтобы иметь право пользоваться формулой (1). Отметим, что на необходимость допустить симметрии, как средство хоть как-то продвинуться в решении поставленной нами задачи, указывал автор работы [1].

Индексом t будем помечать объекты, относящиеся к пространству $<M_0, \gamma_{\alpha\beta}(t)>$.

Для простоты будем считать, что всегда $\beta_1 = 0$. Пространство $<M_0, \gamma_{\alpha\beta}(t)>$ при $t < 1/2$ связно, и поэтому

$$\int_{M_0} f(\xi_t) dv_t = 4\pi l(\xi_t), \tag{2}$$

где

$$f(\xi_t) = K(\xi_t^\perp) + 3K(\xi_t).$$

При $s > 1/2$ пространство $< M_0, \gamma_{\alpha\beta}(s) >$ имеет уже две связные компоненты. Следовательно

$$\int_{C_s} f(\xi_s) dv_s = 4\pi l(\xi_s'), \quad \int_{D_s} f(\xi_s) dv_s = 4\pi l(\xi_s''), \tag{3}$$

где штрихи над ξ_s различают поле ξ_s на связных компонентах.

Из (2), (3) получаем

$$\int\limits_{O_\varepsilon}\{f(\xi_s)dv_s - f(\xi_t)dv_t\} = 4\pi\{l(\xi_s') + l(\xi_s'') - l(\xi_t)\}.$$

Естественно считать, что объем области D_0 мал по сравнению со всем пространством. Поэтому $l(\xi_s') \sim l(\xi_t)$, а $l(\xi_s'')$ по порядку величины совпадает с линейным размером λ области D_0. Далее, в O_ε для достаточно близких к 1/2 значений t, s $dv_s/dv_t \leq 1$ в силу "б". Но тогда благодаря условию "е"имеем

$$\int\limits_{O_\varepsilon} f(\xi_s)dv_t \geq \int\limits_{O_\varepsilon} f(\xi_s)\frac{dv_s}{dv_t}dv_t \sim 4\pi\lambda + \int\limits_{O_\varepsilon} f(\xi_t)dv_t,$$

т.е.

$$\int\limits_{O_\varepsilon} \delta f \cdot dv_t \sim 4\pi\lambda, \tag{4}$$

где $\delta f \equiv f(\xi_s) - f(\xi_t)$.

Вводя среднее значение величины g

$$< \mathrm{g} > = \frac{1}{v_t(O_\varepsilon)}\int\limits_{O_\varepsilon} \mathrm{g} dv_t,$$

где $v_t(O_\varepsilon)$ — объем области O_ε в метрике $\gamma_{\alpha\beta}(t)$, перепишем (4) в следующем виде:

$$< \delta f > \cdot\, v_t(O_\varepsilon) \sim 4\pi\lambda. \tag{5}$$

Это соотношение говорит о том, что отрыв области D_0 сопровождается скачком кривизны 3-пространства. Так как для скалярной кривизны ${}^{(3)}R$ 3-пространства можно написать ([4], с.140).

$${}^{(3)}R_t = 2\{K(\xi_t^\perp) + 2K(\xi_t)\},$$

то следует предположить

$$< \delta^{(3)}R > \sim < \delta f > . \tag{6}$$

Из уравнений Эйнштейна имеем ([5], с.157)

$$^{(3)}R_t + K_{2,t} = \frac{16\pi G}{c^4}\,\varepsilon(t), \quad K_{2,t} = (K_{\alpha}^{\cdot\alpha})^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}, \tag{7}$$

где $K_{\alpha\beta}$ — тензор внешней кривизны пространственного сечения; $\varepsilon(t)$ — плотность энергии. Благодаря условию "г", инвариант $K_{2,t} = K_{2,t}(x)$, $x \in M_0$, $t \in [0,1]$, будет непрерывной функцией на $M_0 \times [0,1]$. Следовательно, если $\delta K_2 = K_{2,s} - K_{2,t}$, то

$$< \delta K_2 > = [K_{2,s} - K_{2,t}]|_{x=x_0(t,s)} \xrightarrow[s \to 1/2+0]{t \to 1/2-0} 0$$

Поэтому для некоторых $t_0 < 1/2$ и $1/2 < s_0$ величина $< \delta K_2 >$ пренебрежимо мала, и тогда из (5), (6), (7) получаем

$$< \delta\varepsilon > \sim \frac{c^4}{4\pi G}\,\frac{\lambda}{v_{t_0}(O_\varepsilon)}\,,$$

или можно написать

$$< \delta\varepsilon > \sim \frac{c^4}{4\pi G}\,\frac{1}{\sigma}\,,$$

где σ — характерное сечение области D_0.

Пользуясь этим соотношением, получаем, что
1) при $\sigma \sim 10^{202}$ (Солнце), $< \delta\rho > = < \delta\varepsilon > /c^2 \sim 10^7/^3$;
2) $\sigma \sim 10^{122}$ (нейтронная звезда), $< \delta\rho > \sim 10^{15}/^3$;
3) $\sigma \sim 1^2$, $< \delta\rho > \sim 10^{17}/^3$;
4) $\sigma \sim 10^{-662}$ (сингулярность), $< \delta\rho > \sim 10^{93}/^3$;

Следовательно, отрыву малых областей препятствует мощный потенциальный барьер. Видимо, нарушение связности происходит вблизи сингулярностей кривизны и внутри черных дыр. Нейтронные звезды близки к тому, чтобы оторваться от окружающего пространства. Это неплохо согласуется с тем, что в случае потери устойчивости нейтронные конфигурации претерпевают гравитационный коллапс.

Замечание. Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно вывести условия образования ручек у физического пространства M, т.е. можно определить затраты энергии, влекущие нарушение односвязности пространства $(\beta_1(M) = 0 \to \beta_1(M) \neq 0)$.

Список литературы

[1] P.Y o d i z. Gen. Relat. and Gravit., **4**, 299, 1973.

[2] Э. С п е н ь е р. Алгебраическая топология, М., Мир, 1971.

[3] A. R e v e n t ó s. Tôhoku Math. Journ., **31**, 165, 1979.

[4] Л. П. Э й н з е р х а р т. Риманова геометрия, М., ИЛ, 1948.

[5] Ч. М и з н е р, К. Т о р н, Д ж. У и л е р. Гравитация, т. 2, М., Мир, 1977.