1982 г. март—апрель *т. 37, вып. 2(224)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 513.82

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. К. Гуц

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

История науки показывает, что более полное и глубокое понимание любой научной теории самым тесным образом связано с ее аксиоматическим изложением. Аксиоматический метод повсеместно принят на вооружение математиками, использующими его всякий раз, когда требуется либо выяснить суть исследуемого материала, либо изложить его в наиболее доступном и рациональном виде.

В свое время успехи этого метода в математике навели Гильберта на мысль о необходимом его приложении к физическим дисциплинам. Причем Гильберт не только сформулировал задачу аксиоматизации физических теорий в «Математических проблемах» [43], но и аксиоматизировал феноменологическую теорию излучения и свою собственную единую полевую теорию гравитации и электромагнетизма [63]. К настоящему времени известны многочисленные примеры аксиоматизаций самых различных областей физики [39], [43], [49], [58], среди которых особо выделяется аксиоматическая квантовая теория поля [32]. Однако чаще, чем другие физические теории, пытались аксиоматизировать специальную теорию относительности [12], [19], [31], [40], [41], [53], [56], [57], [60], [72], [73], [75]. Впрочем, это вполне понятно, если учесть то, что эта теория глубоко геометрична и поэтому сравнительно легко аксиоматизируется.

В этом обзоре изучаются самые различные системы аксиом, относящиеся к специальной теории относительности. В основу положены исследования, проводившиеся главным образом в нашей стране и принадлежащие целому ряду авторов. Главная цель, которая преследовалась в этой статье,— показать, что метрическая структура пространства-времени, мира Минковского (или геометрия неоднородной группы Лоренца), определяется тем, что одни события воздействуют на другие. Тем самым дается ответ на вопрос Римана «о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве», заданный великим геометром в его лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» ([11], с. 15; [44], с. 323).

Отправным моментом при создании аксиоматической теории относительности является понятие пространства-времени. Представление о пространстве-времени как о четырехмерном в пространстве и времени мире, как известно, впервые было введено Германом Минковским.

Минковский писал, что «для истинного понимания группы Лоренца G_c термин «постулат относительности» для требования инвариантности по отношению к группе G_c кажется мне слишком бедным». Истинной основой теории относительности, по его мнению, является «постулат абсолютного мира», утверждающий о том, что в явлениях нам дается только четырехмерный мир событий (мировых точек) — пространство-время, проекции которого на пространство и на время могут быть взяты с некоторым произволом.

Следующий шаг был сделан в 1914 г. А. Роббом [75], положившим в основу аксиоматического построения теории относительности понятие о следовании событий.

Идеи Минковского и Робба были всесторонне развиты в работах А. Д. Александрова [2] — [5], [11], [12], [14], [15], которые представляют собой наиболее значительное на сегодняшний день продвижение по созданию аксиоматической теории пространства-времени. Пространство-время, по взглядам А. Д. Александрова, есть множество всех событий в мире, отвлеченное от всех его свойств, кроме тех, которые определяются отношениями воздействия одних событий на другие, т. е., выражаясь менее точно, пространственно-временная структура мира есть не что иное, как его причинно-следственная структура взятая в соответствующей абстракции.

Настоящий обзор состоит из четырех глав. В первой главе, названной «Геометрия пространства-времени», излагаются результаты по аксиоматизации геометрии Минковского на основе представления о причинно-следственных взаимодействиях. При этом под геометрией Минковского понимается четырехмерная псевдоевклидова геометрия сигнатуры $(+ - - -)$ с метрикой, задаваемой следующей дифференциальной формой:

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2.$$

Группа движений в этой геометрии называется неоднородной группой Лоренца или группой Пуанкаре. Поэтому иногда данная геометрия именуется лоренцевой. Последний термин использован в статье лишь в §§ 8, 9 главы 1.

В главе 1, § 1, излагаются исходные положения о структуре пространства-времени, взятые нами из статьи А. Д. Александрова [3]. В § 3 доказывается важная теорема, показывающая, в каких случаях топология пространства-времени порождается причинным порядком. Различные системы аксиом излагаются в §§ 6—10.

В главе 2 собраны результаты об отображениях, сохраняющих семейства конусов в аффинном n-мерном пространстве. Исторически многие первые попытки аксиоматизации теории относительности были связаны с рассмотрением семейств конусов, поэтому в данной главе перечисляются соответствующие системы аксиом (см. §§ 13, 14, 17). Вторая глава имеет наиболее обширную библиографию: [1]—[3], [9]—[11], [14]—[18], [20]—[23], [33]—[35], [47], [50], [52]—[55], [61], [65]—[68], [70], [71], [74], [76], [77], [79], [80].

В главе 3 изучаются связные предпорядки. Указываются условия, при выполнении которых предпорядок будет задаваться конусом (§ 22). В § 23 дается описание конусов, допускающих транзитивную группу преобразований.

В главе 4 излагаются отдельные результаты, касающиеся различных обобщений понятия пространства-времени. В § 26 формулируется интересная теорема Меламента об отображениях, сохраняющих причинный порядок в псевдоримановом пространстве.

Я благодарю А. Д. Александрова и В. Ю. Ровенского за полезные советы, способствовавшие улучшению рукописи этой статьи.

ГЛАВА 1
ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

§ 1. Понятие о пространстве-времени [3]

(1.1) Что такое пространство-время? Ответ нам нужен не на философском уровне, а на таком, какой дал бы почву для построения теории пространства-времени. Ответ должен заключаться в теории относительности, так как она и является теорией пространства-времени, но ответ этот нужно еще из нее извлечь.

Форма предмета есть, собственно, не что иное, как совокупность отношений его частей. Поэтому речь идет о тех материальных связях мира, которые в своей совокупности и определяют пространство-время.

Простейший элемент мира — это то, что называется событием. Это «точечное» явление вроде мгновенной вспышки точечной лампы или, пользуясь наглядными понятиями о пространстве и времени, это явление, протяжением которого в пространстве и во времени можно пренебречь. Словом, событие аналогично точке в геометрии, и, подражая определению точки, данному Евклидом, можно сказать, что событие — это явление, часть которого есть ничто, оно есть «атомарное» явление. Всякое явление, всякий процесс представлется как некоторая связная совокупность событий. С этой точки зрения весь мир рассматривается как множество событий.

Отвлекаясь от всех свойств события, кроме того, что оно существует, мы представляем его как точку, «мировую точку». Пространство-время и есть множество всех мировых точек.

Однако при таком определении пространство-время еще не обладает никакой структурой — оно просто совокупность событий, в которых удерживается лишь один факт их существования как разных событий, в отвлечении от всех прочих свойств и без всяких пока отношений между ними. Можно ввести понятие о непрерывности ряда событий, заимствуя его из наглядного представления или давая ему какое-либо подходящее определение. Тогда пространство-время окажется просто четырехмерным многообразием в смысле топологии. Мы не останавливаемся на этом и определяем структуру и саму непрерывность пространства-времени, исходя из самого общего и основного отношения событий, какое имеется в мире. Мы имеем в виду движение материи.

Каждое событие так или иначе воздействует на некоторые другие события и само подвержено воздействиям других событий. Физическая природа воздействия может быть весьма разнообразной; мы можем представлять его как распространение света, вылет частицы и т. п. Понятно, что оно не обязано быть непосредственным, а может идти через ряд агентов. Само движение малого тела представляет ряд событий, в котором предыдущие события воздействуют на последующие. В понятиях физики воздействие можно определить как передачу импульса и энергии. Эти понятия представляются тогда первоначальными, что отвечает существу дела, так как импульс и энергия есть основные физические характеристики движения и воздействия. Но, отвлекаясь в самих событиях от их конкретных свойств, мы отвлекаемся и в понятии воздействия от его конкретных свойств, кроме того, что оно есть отношение между событиями, обладающее свойствами предшествования (антисимметричностью и транзитивностью). Если мыслить аксиоматическое (а такова основная задача работы) построение теории пространства-времени, то понятия события — мировой точки и воздействия — предшествования берутся как исходные и не подлежащие определению. Те события, которые подвергаются воздействию данного события a, образуют «область P_a воздействия события a». Такие области определяют в множестве всех событий некоторую структуру. Она равносильна, конечно, той структуре, которая определяется самими отношениями воздействия. Эта структура и есть пространственно-временная структура мира. Иначе говоря, само пространство-время можно определить следующим образом.

Пространство-время есть множество всех событий в мире, отвлеченное от всех его свойств, кроме тех, которые определяются отношениями воздействия одних событий на другие.

Воздействие одного события на другое есть элементарная форма причинной связи, точно так же как событие есть «атомарное» явление. Поэтому только что сказанное можно выразить хотя и менее точно, но более выразительно в следующих словах: пространственно-временная структура мира есть не что иное, как его причинно-следственная структура, взятая лишь в соответствующей абстракции. Эта абстракция состоит в отвлечении от всех свойств явлений и их причинных связей, кроме того, что явления слагаются из событий, а их взаимные влияния — из воздействий одних событий на другие.

То, что высказанное определение пространства-времени действительно возможно в рамках специальной теории относительности, доказывается в этой работе.

Данное определение пространства-времени представляет собой не что иное, как соответствующее современной физике конкретное и точное выражение того, что пространство-время есть форма существования материи. Сама материя в ее движении и тем самым во взаимодействии ее элементов и определяет свою пространственно-временную форму.

(1.2) Перейдем теперь к чисто математическому определению пространства-времени.

А к с и о м а A_1. *Пространство-время — это связное односвязное локально компактное хаусдорфово четырехмерное топологическое пространство* V, *на котором заданы семейство подмножеств* $\{P_a : a \in V\}$ *—«областей воздействия» и транзитивная коммутативная группа* T *гомеоморфизмов* V *на себя, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *подмножество* $P_a \neq \{a\}$ *сопоставлено каждой точке* $a \in V$;

2) $a \in P_a$ *для любой точки* $a \in V$;

3) *если* $y \in P_x$, *то* $P_y \subset P_x$;

4) *для любого гомеоморфизма* $t \in T$ *и любой точки* $a \in V$ *имеет место равенство* $t(P_a) = P_{t(a)}$.

Приведенная аксиома, казалось бы, не отвечает желанию определить топологию пространства-времени, исходя только из структуры, задаваемой областями воздействия P_a. Но из приводимых ниже теорем (см. §§ 3, 6) станет ясно, что это действительно так, и мы могли бы исходную аксиому A_1 изложить в терминах, использующих только области P_a, но это привело бы к чрезмерно усложненной формулировке аксиомы, теряющей всю свою простоту и наглядность.

(1.3) Из аксиомы A_1 сразу же следует [42], [59], что в V можно ввести координаты x^1, x^2, x^3, x^4 так, что элемент $t \in T$ можно представить в виде обычного переноса: $t : (x^1, x^2, x^3, x^4) \to (x^1 + t^1, x^2 + t^2, x^3 + t^3, x^4 + t^4)$, т. е. V есть четырехмерное аффинное пространство, а T — группа параллельных переносов в V.

Постулирование существования группы T связано с предположением об однородности пространства-времени, причем отказ от коммутативности приводит нас к геометрии пространства-времени, отличной от геометрии Минковского (см. § 24).

(1.4) Из аксиомы A_1 следует, что семейство областей воздействия $\{P_a\}$ инвариантно относительно гомеоморфизмов группы T. Поэтому достаточно задавать одну область P_e, отвечающую некоторой фиксированной точке e, а остальные получать «разносом» по V с помощью группы T. Далее мы фиксируем точку e и будем писать P вместо P_e.

(1.5) Мы будем говорить, что область влияния P задает в аффинном пространстве V предпорядок, если выполняются для системы подмножеств $\{P_a : a \in V\}$ условия 1) —3) аксиомы A_1.

Если для предпорядка P дополнительно справедливо условие: $x \neq y$ влечет $P_x \neq P_y$, то будем говорить, что P задает порядок в V.

Введем следующее обозначение: мы пишем $x \leqslant y$ тогда и только тогда когда $y \in P_x$. Очевидно, что в случае, когда P задает порядок в V, отношение $\leqslant$ задает частичный порядок на множестве V.

Физически отношение $x \leqslant y$ можно интерпретировать как отношение причинности, в котором x — причина, а y — следствие, т. е. мы констатируем наличие передачи воздействия (энергии—импульса) от события x к событию y.

(1.6) Далее полагаем $P_x^- \equiv \{y \in V : y \leqslant x\}$.

(1.7) Говорим, что предпорядок P — замкнутый, если P — замкнутое множество; предпорядок P — открытый, если множество $P \setminus \{e\}$ открыто. В случае, когда P — конус и $P \setminus \{e\}$ — открытое множество, говорим об открытом конусе.

(1.8) Аксиома A_2. *Для любых точек* $x, y \in V$ *таких, что* $y \in P_x$, *множество* $P_x \cap P_y^-$ *ограничено.*

Аксиома A_2 на языке физики говорит об ограниченности скорости передачи воздействия.

§ 2. Обозначения и определения

(2.1) Как уже говорилось в конце § 1, пространство-время V — это четырехмерное аффинное пространство. Поэтому далее, на протяжении всей статьи, под V будем понимать четырехмерное аффинное пространство. Через A^n будем обозначать n-мерное аффинное пространство.

(2.2) Точки пространства A^n будем обозначать малыми латинскими буквами. Если B — множество, то $\operatorname{int} B$, $\overline{B}$, ∂B, $\operatorname{conv} B$ обозначают соответственно его внутренность, замыкание, границу и выпуклую оболочку.

Пусть M — множество в A^n. Через M_x будем обозначать множество, полученное из M с помощью переноса $t \in T$ такого, что $t(e) = x$. Полагаем, по определению, $M = M_e$.

(2.3) Если $x, y \in A^n$, то $[x, y]$ есть отрезок прямой в A^n с концами x и y, а $(x, y) = [x, y] \setminus \{x, y\}$. В A^n вводим евклидову метрику $| x - y |$ с началом e.

Далее, $l(x, y)$ и $l^+(x, y)$ $(x \neq y)$ обозначают соответственно прямую, проходящую через точки x, y, и луч, исходящий из точки x и проходящий через y.

Если $x \in A^n$ и $r > 0$ — некоторое число, то через $B(x, r)$ обозначаем открытый шар с радиусом r и центром x, т. е. $B(x, r) = \{y \in A^n : | x - y | < r\}$.

Ясно, что топология пространства-времени V задается с помощью метрики $| x - y |$.

(2.4) Дадим теперь определения смещения и квазицилиндра.

Смещением d_{El} (или d_{EL}), где E — некоторая гиперплоскость, а l — вектор (или луч L), непараллельный E, называется гомеоморфизм A^n в себя, удовлетворяющий условиям:

1) на каждой гиперплоскости E_a, параллельной E, d_{El} (соответственно d_{EL}) есть перенос из группы T;

2) d_{El} (или d_{EL}) переводит отрезки (лучи), равные и параллельные l (соответственно L) в такие же отрезки (лучи) [10].

Квазицилиндром $Q(E, l)$ называется множество M, удовлетворяющее следующим условиям [10]:

1) имеются гиперплоскости $E_1, E_2, \ldots$, параллельные E, где E_{i+1} получено из E_i переносом на вектор l, а множество M представляется в виде

$$(*) \qquad M = \bigcup_i [M_i \cup (M \cap E_i)],$$

где каждое M_i есть цилиндр, образованный открытыми отрезками, равными l (как векторы), с концами на E_i, E_{i+1} (не исключается, что некоторые и даже все M_i пусты);

2) M не допускает представления $(*)$ с той же гиперплоскостью E и вектором l', параллельным l, но не равным l.

Наглядно квазицилиндр состоит из поставленных друг на друга цилиндров с равными и параллельными образующими; основания цилиндров удалены и между цилиндрами есть прокладки на гиперплоскостях E_i.

Квазицилиндр можно охарактеризовать как множество M, для которого существуют гиперплоскость E, вектор l и перенос $t \in T$ такие, что $d_{El}(M) = t(M)$ ([10], с. 15).

Определение квазицилиндра $Q(E, L)$, где L — луч, дается аналогично определению квазицилиндра $Q(E, l)$.

(2.5) Биективное отображение $f : A^n \to A^n$, удовлетворяющее условию $f(P_x) = P_{f(x)}$ для любой точки $x \in A^n$, где P — предпорядок в A^n, будем называть изотонным.

Из определения следует, что обратное отображение f^{-1} также является изотонным, т. е. $f^{-1}(P_x) = P_{f^{-1}(x)}$ для любой точки $x \in A^n$.

(2.6) Образующая конуса, лежащего в аффинном пространстве A^n, называется крайней, если она не содержится в выпуклой оболочке остальных его образующих. В случае выпуклого конуса крайняя образующая — это образующая, которая не лежит в углу между любыми двумя другими образующими.

Если M — некоторое множество в пространстве A^n, то точка $x \in M$ называется крайней, если она не содержится в выпуклой оболочке остальных точек. Если M — выпуклое множество, то крайняя точка — это такая точка, которая не содержится внутри отрезка с концами, принадлежащими множеству M.

§ 3. Теорема о непрерывности

Пусть выполнена аксиома A_1.

(3.1) Теорема 1. *Пусть области влияния $\{P_a\}$ удовлетворяют аксиоме A_2 и либо множество $P \setminus \{e\}$ — открытое, либо P — замкнутое с внутренними точками. Тогда любое изотонное отображение f является гомеоморфизмом.*

Доказательство [8], [12]. (а) Пусть $P \setminus \{e\}$ — открытое множество. Рассмотрим непустое множество $M = (P \cap P_a^-) \setminus \{e, a\}$, где $a \in P$ — некоторая точка. Очевидно, M — открытое множество. Пусть $x \in V$ — произвольная точка и U — произвольная открытая окрестность точки $f(x)$. Положим

$$M_1 = \bigcup \{t(M) : e \in t(M)\}.$$

Это центрально симметричное относительно e множество. Его замкнутая выпуклая оболочка H также центрально симметрична. Пусть b, $\tilde{b}$ — две взаимно симметричные крайние точки оболочки H. Ясно, что $b, \tilde{b} \in \bar{M}_1$.

Пусть t, $\tilde{t}$ — переносы такие, что $t(b) = f(x)$, $\tilde{t}(\tilde{b}) = f(x)$. Тогда, так как точки b, $\tilde{b}$ — крайние, то $t(\bar{M}_1) \cap \tilde{t}(\bar{M}_1) = \{f(x)\}$. Ввиду этого найдутся такие малые переносы τ, $\tilde{\tau}$, что

$$(1) \qquad f(x) \in \tau t(M_1) \cap \tilde{\tau}\tilde{t}(M_1) \subset U.$$

Из равенства $f(P_u) = P_{f(u)}$ в силу биективности отображения f следует равенство $f^{-1}(P_u) = P_{f^{-1}(u)}$ для любой точки $u \in V$. Следовательно, f^{-1} отображает семейство открытых множеств $\{M_a : a \in V\}$ на некоторое семейство открытых множеств $\{f^{-1}(M_a) : a \in V\}$. Каждое множество $f^{-1}(M_a)$ можно представить в виде $(P_b \cap P_c^-) \setminus \{b, c\}$ для некоторых точек b, c, где $c \in P_b$. Следовательно, $B = f^{-1}(\tau t(M_1))$ и $\tilde{B} = f^{-1}(\tilde{\tau}\tilde{t}(M_1))$ представимы в виде объединений открытых множеств вида $(P_b \cap P_c^-) \setminus \{b, c\}$, т. е. B и $\tilde{B}$ — открытые множества, содержащие точку x. Но тогда отношение (1) можно переписать в виде

$$(2) \qquad f(x) \in f(B \cap \tilde{B}) \subset U.$$

Так как $x \in B \cap \tilde{B}$ и $B \cap \tilde{B}$ — открытое множество, то (2) означает непрерывность f в точке x. В силу произвольности точки x отсюда следует непрерывность отображения f. Значит, f — гомеоморфизм. Пункт (а) доказан.

(б) Пусть P — замкнутое множество с внутренними точками.

Предположим, что множество $M = P \cap P_a^-$ содержит внутренние точки. Возьмем произвольно $y \in V$ и вокруг нее открытый шар U, настолько малый, чтобы его покрывало какое-либо множество $t(M)$. Пусть r — радиус шара U. Образуем множество W — пересечение всех $t(M) \supset U$. Оно не содержит шаров, равных U (кроме самого U), так как если U' — такой шар и τ — перенос от его центра к центру U, то $\tau(W) \supset U$ и, стало быть, по определению множества W должно быть $\tau(W) = W$. Но тогда W неограничено вопреки ограниченности M.

Итак, W не содержит шаров, равных U. Отсюда следует, что вне концентричного U шара $2U$ двойного радиуса множество W не содержит открытых шаров U' радиусов $r' \geqslant r - \varepsilon$ с каким-то $\varepsilon > 0$.

Возьмем шар U_1 радиуса $r_1 = \varepsilon/2$, концентричный U. Определим по нему множество W_1 так же, как W определено по U.

Тогда ввиду выбора r_1 оказывается, что $W_1 \subset 2U$. В самом деле, пусть существует $u \in W_1 \setminus 2U$. Тогда, так как $W_1 \subset W$, то $u \in W$. Найдется точка $z \in (V \setminus W) \cap S(u, r - \varepsilon)$, где $S(u, \rho)$ обозначает сферу с центром u и радиусом ρ. Пусть t — перенос точки z в u. Но тогда $t(W) \supset U_1$ и $u \notin t(W)$, т. е. $u \notin W_1$. Получили противоречие с предположением $u \in W_1$.

Итак, $W_1 \subset 2U$. Продолжая описанный процесс, получим последовательность множеств W_n такую, что $U_n \subset W_n \subset 2U_{n-1}$ и $\bigcap_n W_n = \{y\}$.

Теперь заметим, что так как W_n есть пересечение всех $t(M) \supset U_n$, то $f^{-1}(W_n)$ есть пересечение всех $f^{-1}[t(M)] \supset f^{-1}(U_n)$. Но в силу равенства $f^{-1}(P_x) = P_{f^{-1}(x)}$ множество $f^{-1}[t(M)]$ имеет вид $P_b \cap P_c^-$, где $c \in P_b$. Поэтому множества $f^{-1}(W_n)$ будут компактными. Но их пересечение есть точка $x = f^{-1}(y)$. Значит, какова бы ни была окрестность O_x точки x, найдется такой номер n, что $f^{-1}(W_n) \subset O_x$. Этим доказана непрерывность f^{-1}, а стало быть, и f. Пункт (б) доказан.

Теорема доказана.

(3.2) Заметим, что в случае, когда $P \setminus \{e\}$ открыто, множества вида $(P_a \cap P_b^-) \setminus \{a, b\}$ образуют базу топологии, эквивалентной топологии пространства-времени V. В случае замкнутого P с внутренними точками «интервалы» $P_a \cap P_b^-$ $(b \in P_a)$ образуют базу топологии, в общем-то более сильной, нежели топология пространства-времени.

§ 4. Теоремы о контингенции

Рассматриваем аффинное пространство A^n $(n \geqslant 2)$.

(4.1) Пусть дано множество $M \subset A^n$. *Контингенцией* $\mathrm{cont}(M, a)$ множества M в точке a называется конус, образованный всеми возможными пределами лучей $l^+(a, x)$, где $x \in M$, при стремлении x к a. Если a не является предельной точкой M, то такого конуса нет. Но тогда можно считать $\mathrm{cont}(M, a) \equiv \{a\}$ — «нулевой конус».

Все излагаемые ниже теоремы принадлежат А. Д. Александрову [10].

(4.2) $\mathrm{cont}(M, a) = \mathrm{cont}(\bar{M}, a)$.

Доказательство [38]. Так как $M \subset \bar{M}$, то, очевидно,

$$\mathrm{cont}(M, a) \subset \mathrm{cont}(\bar{M}, a).$$

Докажем, что

$$\mathrm{cont}(\bar{M}, a) \subset \mathrm{cont}(M, a). \tag{1}$$

Если $\mathrm{cont}(\bar{M}, a) = \{a\}$, то и $\mathrm{cont}(M, a) = \{a\}$. Пусть $b \in \mathrm{cont}(\bar{M}, a)$, $b \neq a$. Для доказательства соотношения (1) достаточно установить, что луч $l = l^+(a, b)$ содержится в $\mathrm{cont}(M, a)$. Задавшись любым $\varepsilon > 0$, рассмотрим множество

$$W = \bigcup_{|x-b|<\varepsilon} l^+(a, x).$$

Так как $l \subset \operatorname{cont}(\bar{M}, a)$, то в W есть точки $a_n \in \bar{M}$, сколь угодно близкие к a. Отсюда следует, что в W есть точки $x_n \in M$, сколь угодно близкие к a. Тем самым установили, что $l \subset \operatorname{cont}(M, a)$. Соотношение (1) и утверждение (4.2) доказаны [38].

(4.3) $\operatorname{cont}(M, a)$ есть замкнутое множество. В самом деле, пусть луч $l^+(a, x)$ содержится в $\overline{\operatorname{cont}(M, a)}$. Это означает, что

$$(2) \qquad l^+(a, x) = \lim_{n\to\infty} l_n,$$

где

$$(3) \qquad l_n = \lim_{k\to\infty} l(a, x_{kn}), \; x_{kn} \in M, \; \lim_{k\to\infty} x_{kn} = a.$$

Задавшись любым $\varepsilon > 0$, рассмотрим множество

$$W = \bigcup_{|u-x|<\varepsilon} l^+(a, u).$$

Из (2), (3) следует, что в W есть точки x_{kn}, сколь угодно близкие к a. Тем самым мы установили, что $l^+(a, x) \subset \operatorname{cont}(\bar{M}, a)$. Утверждение (4.3) доказано [38].

(4.4) Пусть P задает предпорядок в аффинном пространстве A^n. Назовем направленной кривой, исходящей из точки x, образ полуоси $[0, +\infty)$ при непрерывном и монотонном (не убывающем по отношению к естественному порядку на $[0, +\infty)$ и предпорядку P в A^n) отображении ее в A^n, при котором 0 отображается в x. Очевидно, всякая направленная кривая, исходящая из x, содержится в P_x.

(4.5) Теорема 1. *Пусть P задает предпорядок в A^n $(n \geqslant 2)$ и $C = \operatorname{cont}(P, e)$. Тогда (1) $C \subset \bar{P}$ и C — замкнутый выпуклый конус; (2) если P — замкнутое множество, удовлетворяющее аксиоме A_2, то C — конус с острой вершиной («острая вершина» — значит C не содержит прямой), совпадающий с объединением S всех направленных кривых, исходящих из точки e.*

Доказательство [10], [38]. Лучом контингенции C будем называть луч, исходящий из e и содержащийся в C. Случай $e \notin \overline{P \setminus \{e\}}$ тривиален. Считаем далее, что $e \in \overline{P \setminus \{e\}}$.

(1) Покажем, что $C \subset \bar{P}$. Пусть l — луч контингенции C; по самому определению он является пределом лучей $l_n = l^+(e, x_n)$, где $x_n \in P$, $x_n \to e$ при $n \to \infty$. Вместе с точкой x_n каждый луч l_n содержит точки $k \cdot x_n$ $(k = 1, 2, \ldots)$, причем, очевидно, все $k \cdot x_n \in P$. По мере того, как $x_n \to e$, точки $k \cdot x_n$ сгущаются на лучах l_n и их пределы образуют луч l. Но так как все $k \cdot x_n \in P$, то $l \subset \bar{P}$. Следовательно, $C \subset \bar{P}$.

Докажем, что C выпукло. Пусть l_1, l_2 — два луча из C. По доказанному $l_1, l_2 \subset \bar{P}$. Так как $\bar{P}$ тоже задает предпорядок, то при $x_1 \in l_1$, $x_2 \in l_2$ точка $x_1 + x_2 \in \bar{P}$. Когда же x_1, x_2 независимо пробегают лучи l_1, l_2 соответственно, $x_1 + x_2$ зачерчивает угол U между ними. Стало быть, этот угол $U \subset \bar{P}$. Но всякий луч $l^+(e, x) \subset \bar{P}$, очевидно, лежит в $\operatorname{cont}(\bar{P}, e)$. По (4.2) $\operatorname{cont}(\bar{P}, e) = \operatorname{cont}(P, e) = C$. Поэтому $U \subset C$, чем выпуклость C доказана. Замкнутость C следует из утверждения (4.3).

Первая часть утверждения теоремы доказана.

(2) Докажем второе утверждение. Если бы C содержало прямую, то, ввиду выпуклости и замкнутости C, $C \cap C^-$, где C^- — множество точек, центрально симметричных множеству C относительно e, тоже содержало бы прямую. В силу замкнутости P, $P = \bar{P}$. Поэтому, так как $C \subset P$, $C^- \subset P^-$,

то $P \cap P^-$ содержит прямую, т. е. неограниченно. Это противоречит аксиоме A_2. Итак, C — конус с острой вершиной.

Очевидно, всякий луч, содержащийся в P, является направленной кривой. Поэтому, так как $C \subset P$, и, очевидно, содержит все такие лучи, то, стало быть, $C \subset S$. Покажем, что и, обратно, $S \subset C$. Допустим противное, и пусть a — точка из S, не принадлежащая C. Пусть L — дуга направленной кривой, проходящая из e через a, образованная точками $x : e \leqslant x \leqslant a$.

По доказанному C есть замкнутый конус с острой вершиной. Поэтому его можно заключить в такой замкнутый, выпуклый конус K с острой вершиной e, что (i) $C \setminus \{e\}$ содержится внутри K и (j) $a \notin K$. Тогда конус K имеет в e строго опорную плоскость Q, отделяющую от K точку a.

Так как $C \setminus \{e\}$ лежит внутри K, то, как следует из самого определения контингенции, существует такая окрестность U точки e, что $P \cap U \subset K$. Поэтому некоторый начальный отрезок дуги L содержится в K. Но дуга L доходит до a, отделенной от K плоскостью Q. Поэтому L пересекает Q.

Пусть b — последняя (в смысле порядка на L) точка дуги L, в которой L пересекает Q. Пусть L' — часть L, заключенная между b и a. Очевидно, $L' \subset P_b$. Как отмечено выше, имеется окрестность U точки e такая, что $P \cap U \subset K$. Поэтому $P_b \cap U_b \subset K_b$, и, стало быть, некоторый начальный отрезок дуги L' лежит в K_b.

Плоскость Q, будучи строго опорной для K, будет таковой и для K_b (поскольку $b \in Q$). Поэтому дуга L' на начальном отрезке оказывается отделенной от точки a. Но она должна достигать ее и, стало быть, должна пересечь плоскость Q. Значит, точка b не может быть последней, в которой дуга L пересекает Q.

Полученное противоречие показывает, что $a \in S$ необходимо принадлежит C. Тем самым $S \subset C$. Следовательно, мы окончательно установили, что $S = C$.

Теорема доказана.

(4.6) Т е о р е м а 2. *Пусть $f : A^n \to A^n$, $n \geqslant 2$,— непрерывное P-изотонное отображение и P — замкнутый предпорядок, удовлетворяющий аксиоме A_2; тогда $f(C_x) = C_{f(x)}$, где $C = \mathrm{cont}(P, e)$, для любой точки $x \in A^n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о [10]. По теореме (4.5) $C_x = S_x$, где S_x — объединение всех направленных кривых, исходящих из x. Так как f гомеоморфно, то оно сопоставляет направленные кривые таким же кривым. Следовательно, $f(S_x) = S_{f(x)}$ или $f(C_x) = C_{f(x)}$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В [38] показано, что от условия A_2 в теореме 2 можно отказаться.

§ 5. Отображение конусов

(5.1) Пусть C_e — конус с вершиной e в аффинном пространстве A^n, т. е. C_e — это множество точек, состоящее из лучей, исходящих из e. Полагаем $C = C_e$.

Предполагаем, что конус C — замкнутое выпуклое множество с острой вершиной (т. е. C не содержит прямой).

Т е о р е м а 1. *Если $C \neq L \times K$, где L — луч с началом e, а K — конус, $L \cap K = \{e\}$, то любой гомеоморфизм $f : A^n \to A^n$ $(n \geqslant 2)$ — такой, что $f(C_x) = C_{f(x)}$ будет аффинным преобразованием.*

Д о к а з а т е л ь с т в о [5], [10]. (A) Пусть $y \in \partial C_x$, $y \neq x$. Определим множество

$$T_{xy} = \bigcup C_z \{x \in C_z,\ y \in \partial C_z\}.$$

Множество T_{xy} состоит из лучей, выходящих из y и проходящих через все точки, принадлежащие C_x. Если замыкание $\overline{T}_{xy}$ есть полупространство, то ∂T_{xy} есть касательная плоскость к C_x в точке y. В общем, $\overline{T}_{xy}$ есть выпуклый конус с вершиной y и содержащий прямую, проходящую через x и y. Пусть R_{xy} — максимальная плоскость, проходящая через y и содержащаяся в $\overline{T}_{xy}$. Для пары точек x', y' имеем $T_{x'y'} = T_{xy}$ тогда и только тогда, когда x', $y' \in R_{xy}$. Поэтому R_{xy} есть множество всех x', для которых существует y' такая, что $T_{x'y'} = T_{xy}$.

Благодаря данному представлению множеств T_{xy} отображение f преобразует их в самих себя. Следовательно, f преобразует плоскости R_{xy} в такие же плоскости с сохранением размерности. В частности, f преобразует касательные плоскости $R_{xy} = \partial T_{xy}$ в касательные.

(Б) Возьмем n касательных к C плоскостей T_i, ограничивающих n-гранный телесный угол W_e. Так как f переводит касательные плоскости в касательные и параллельные — в параллельные, то и ребра углов W_x переходят в параллельные ребра углов $W_{f(x)}$. Возьмем какое-либо ребро λ угла W. Конус C имеет касательные плоскости, отличные от T_i, ибо иначе $C = W$ и получили противоречие с условием $C \neq L \times K$. Все такие касательные плоскости не могут проходить через ребро λ, так как иначе вновь имели бы $C = L \times K$. Поэтому имеется касательная плоскость T, не проходящая через ребро λ и отличная от противоположной ему плоскости T_i. Значит, кроме λ есть еще хотя бы одно ребро λ_1, не содержащееся в T. Плоскость Q, натянутая на λ, λ_1, пересекает T по прямой $l = Q \cap T$. Таким образом, мы имеем на Q три семейства прямых, параллельных соответственно λ, λ_1 и l. При отображении f прямые, параллельные λ, λ_1, переходят в параллельные. Поэтому плоскости Q_x переходят в параллельные и касательные плоскости T_x тоже переходят в параллельные, так что прямые $\{l_x\}$ переходят в параллельные прямые.

Таким образом, плоскость Q отображается на некоторую плоскость Q' так, что семействам $\{\lambda_x\}$, $\{\lambda_{1x}\}$, $\{l_x\}$ отвечают семейства параллельных прямых. Так как f непрерывно, то f аффинно отображает Q на Q' (см., например, § 19, теорема 1, в главе 2).

Следовательно, f аффинно на ребре λ и на всей прямой, идущей вдоль него. Ребро λ было взято произвольно, поэтому f аффинно на прямых, проходящих вдоль ребер угла W. Это же верно для ребер углов W_x. Беря теперь систему координат с осями по ребрам угла W, убеждаемся, что f аффинно на A^n.

Теорема 1 доказана.

(5.2) Теорема 2. *Пусть $C = L_1 \times \ldots \times L_p \times K$, где $K \neq L \times K_1$, K, K_1 — конусы, а $L_1, \ldots, L_p$, L — лучи. Тогда всякий гомеоморфизм $f : A^n \to A^n (n \geqslant 2)$ такой, что $f(C_x) = C_{f(x)}$, представим в виде*

$$f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_p, \tag{1}$$

где f_0 — аффинное преобразование, а d_i — суть смещения $d_{E_i L_i}$, являющиеся гомеоморфизмами A^n на себя. При этом $f(C)$ всегда является аффинным образом C и в (1) допустимы любые $d_i = d_{E_i L_i}$, а порядок, в котором стоят d_i в (1), безразличен.

Доказательство [10]. Каждый луч L_i в разложении

$$C = L_1 \times \ldots \times L_p \times K \tag{2}$$

является ребром конуса C и служит пересечением всех касательных плоскостей, кроме E_i, противоположной L_i. При отображении f касательные плоскости переходят в касательные (см. доказательство теоремы 1). Поэтому $f(L_i)$ будет также ребром конуса $C_{f(e)}$. Плоскость E, натянутая на конус K, является пересечением плоскостей E_i. Поэтому она отображается в плоскость (а параллельные ей плоскости E_x — в параллельные).

В плоскости E мы имеем систему конусов K_x, которые отображаются в конусы, совмещаемые переносами. По условию $K \neq L \times K_1$, поэтому, по теореме 1, f аффинно на E.

Отсюда вытекает, что существует такое аффинное отображение f_0A^n на A^n, которое переводит C в $C_{f(e)}$ и притом так, что для каждого ребра L_i $f_0(L_i) = f(L_i)$, а также $f_0(K) = f(K)$, причем на E f_0 совпадает с f.

Поэтому, полагая $f_0^{-1} \circ f = h$, имеем

$$h(C) = C,\ h(L_i) = L_i\ (i = 1, \ldots, p), \quad h(E) \equiv E, \tag{3}$$

т. е. h тождественно на E.

То же, конечно, получается для любого конуса C_x, с той разницей, что $h(C_x) = C_{hx}$ и т. п.

Пусть d_1 — отображение $d_{E_1L_1}$, совпадающее с h на прямой N_1, содержащей луч L_1. Тогда отображение $d_1^{-1} \circ h$ тождественно на N_1 и, кроме того, для него будут выполнены соотношения, аналогичные (3) (потому, что $d_1(C) = t(C)$, но перенос t — тождественный, так как вершина e конуса C неподвижна при h, а стало быть, и при выбранном d_1).

Отображение d^{-1}_1 равносильно для каждого конуса C_x его переносу, так что соотношения, подобные (3), выполняются при $d_1^{-1} \circ h$ для любого C_x. Но $d^{-1}_1 \circ h$ тождественно на $N_1 \supset L_1$ и соответственно вводится к переносу на всех параллельных ей прямых N_{1x}.

Теперь положим $d_1^{-1} \circ h = h_1$; определим по h_1 смещение d_2 аналогично тому, как d_1 было определено по h: d_2^{-1} совпадает с h_1 на прямой $N_2 \supset L_2$.

Продолжая этот процесс, придем к отображению $h_p = d_p^{-1} \circ \ldots \circ d_1^{-1} \circ h$, тождественному на всех прямых $N_1, \ldots, N_p$ и сводящемуся, самое большое, к переносам на параллельных им прямых N_{ix}. Но h тождественно на K и сохраняет те же прямые N_i и, самое большое, переносит N_{ix}.

Отсюда следует, что h_p тождественно на всем A^n. Поэтому, вспоминая, что $h = f^{-1}_0 \circ f$, получаем $d^{-1}_p \circ \ldots \circ d^{-1}_1 \circ f^{-1}_0 \circ f = h_p$ — тождественное. Отсюда $f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_p$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 доказана.

§ 6. Геометрия пространства-времени

Изложим систему аксиом, содержащуюся в работе А. Д. Александрова «К основаниям геометрии пространства-времени» [12], [13].

(6.1) Пусть G_a — группа всех биекций g пространства V на себя, обладающая свойствами: $g(a) = a$ и $g(P_x) = P_{g(x)}$ для любой точки $x \in V$.

Аксиома A_3. *Для любых точек $x, y \in \partial P_a \setminus \{a\}$ существует биекция $g \in G_a$ такая, что $g(x) = y$.*

Аксиома A_4. *Для любых точек x, $y \in \operatorname{int} P_a = P_a \setminus \partial P_a$ существует биекция $g \in G_a$ такая, что $g(x) = y$.*

Аксиома A_5[1]. $\operatorname{int} P \neq \varnothing$.

Аксиомы A_3 и A_4 представляют собой требования максимальной однородности и изотропности пространства-времени.

(6.2) Теорема 1 [12]. *Пусть выполняются аксиомы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Тогда P — замкнутый либо открытый эллиптический конус, а G_e — однородная группа Лоренца с растяжениями, т. е. существует декартова система координат x_1, x_2, x_3, x_4 в V такая, что либо*

$$P = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V:\ x_4^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^2 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0\},$$

[1]) В [12] под A_5 понимается другое условие.

либо

$$P=\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\in V\colon\ x_4^2-\sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^2>0,\ x_4>0\}\cup\{e\},$$

где точка e *имеет координаты* $(0, 0, 0, 0)$, *а* G_e *есть прямое произведение группы линейных однородных преобразований, сохраняющих форму* $x_4^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$, *за исключением преобразования* $x_4'=-x_4$, *и группы подобий* $x_i'=\lambda x_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$, *где* $\lambda>0$ — *произвольное число.*

Таким образом, геометрия Минковского может быть аксиоматизирована с помощью группы аксиом $\langle A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\rangle$.

Доказательство теоремы 1. (а) Из A_2, A_4 следует, что $e\in\overline{P\setminus\{e\}}$. В самом деле, по A_5 $\operatorname{int} P\neq\varnothing$. Пусть $a\in\operatorname{int} P$. Тогда, если точка b такова, что $\overrightarrow{eb}=2\overrightarrow{ea}$, то $a<b$, $b\in\operatorname{int}P$. По A_4 найдется $g\in G_e$ такое, что $a=g(b)$; следовательно, $g(b)<b$ и $g^{n+1}(b)<g^n(b)$. Из A_2 вытекает существование сколь угодно близких одна к другой точек $g^n(b)$, $g^m(b)$. Поэтому есть сколь угодно близкие к e точки $x\in P\setminus\{e\}$.

(б) Отображения из G_a непрерывны. В самом деле, из A_3 следует, что либо $P_a=\overline{P}_a$, либо $\operatorname{int}P_a=P_a\setminus\{a\}$. Но тогда утверждение пункта (б) вытекает из A_5 и теоремы о непрерывности (§ 3).

(в) Пусть $C=\operatorname{cont}(P, e)$. По теореме (4.6) $g(C_a)=C_a$ для любой точки $a\in V$ и любого преобразования $g\in G_a$. Либо C лежит в k-мерной плоскости, где $k<4$, либо $\operatorname{int} C\neq\varnothing$. В первом случае получаем противоречие с аксиомами A_3 и A_4. Поэтому $\operatorname{int}C\neq\varnothing$.

(г) Все $g\in G_a$ аффинны. Действительно, g сохраняет семейство замкнутых выпуклых конусов $\{C_a : a\in V\}$, имеющих острую вершину. Поэтому либо g аффинно по теореме 1 из (5.1), либо C — квазицилиндр и $g=g_0\circ d_1\circ\ldots\circ d_p$, где g_0 — аффинное преобразование, а d_i $(i=1, \ldots, p)$ — смещения, по (5.2). Во втором случае, повторяя рассуждения, изложенные в пунктах 6.3—6.8 из [10], мы убеждаемся, что либо g аффинно, либо P — квазицилиндр. Но P не может быть квазицилиндром благодаря аксиоме A_3. Поэтому g аффинно.

(д) Покажем, что $\overline{P}_a=C_a$ и C_a — эллиптический конус. Тем самым будет доказана теорема. Пусть K_a — конус, проектирующий P_q из точки a. Из (г) следует, что $g(K_a)=K_a$ для $g\in G_a$. Если $K_a\neq C_a$, то, добавляя к G_a подобия с центром a, получаем аффинную группу, транзитивную на $K_a\setminus C_a$. Но, как нетрудно видеть, такой группы быть не может. Поэтому $K_a=C_a$, откуда $\overline{P}_a=C_a$. Но тогда G_a действует транзитивно на ∂C_a и по теореме 2 из [6] C_a является эллиптическим конусом (см. также теорему 2 из § 23 главы 3).

Теорема 1 доказана.

(6.3) Аксиоматика $\langle A_1 - A_5\rangle$ не единственно возможная. Для того чтобы сформулировать другие, введем следующие условия:

D_1. *P_a не содержит луча с началом a, сохраняемого группой G_a.*

D_2. *Существуют точка $b\in\overline{P}_a$ и отображение $g\in G_a$ такие, что $g(b)\in P_b$.*

D_3. $a\in\overline{P_a\setminus\{a\}}$.

D_4. *Либо $P_a\setminus\{a\}$ открыто, либо P_a замкнуто, но* $\operatorname{int} P_a\neq\varnothing$.

D_5. *Для любой точки $b\in\partial P_a$ множество $\partial P_a\cap\partial P_{\overline{b}}$ содержится в прямой или линейно упорядочено в предпорядке, задаваемом $\overline{P}$.*

Теорема 2 [1]) [12], [13]. *Геометрия Минковского аксиоматизируется с помощью любого из следующих наборов аксиом:*

$$\langle A_1, A_2, A_3, D_1, D_2\rangle,\ \langle A_1, A_2, A_3, D_1, D_3\rangle,\ \langle A_1, A_2, A_4, D_4, D_5\rangle.$$

[1]) Доказательство этой теоремы не опубликовано.

(6.4) Приведем в заключение этого параграфа интересную теорему, принадлежащую А. Д. Александрову.

Теорема 3 [12]. *Пусть выполнены аксиомы* $\langle A_1, A_2, A_3, A_5, D_3\rangle$. *Тогда в некоторых декартовых координатах* x_1, x_2, x_3, x_4 *множество* P *задается либо соотношением*

$$x_4 \geqslant r^p, \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}, \quad 0 < p \leqslant 1,$$

либо $x_4 > r^p$ *с добавлением точки* $e = (0, 0, 0, 0)$. *При* $p = 1$ *справедливо утверждение теоремы 1, а при* $p < 1$ *группа* G_e *порождается преобразованиями вида* $x_4' = \lambda^p x_4$, $x_\alpha' = \lambda x_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ *и ортогональными преобразованиями с неизменным* x_4.

§ 7. Микропричинность и геометрия пространства-времени

До сих пор мы излагали аксиоматики, в которых области воздействия P_a содержат события, сколь угодно близкие к событию a. Это означает, что причинно-следственная структура распространяется наравне с явлениями макромира на явления микромира. Кроме того, при таком подходе предполагается непрерывная передача воздействия; запрещается скачкообразная передача энергии-импульса. Однако довольно часто физиками ставится вопрос о правомерности распространения представлений о причинно-следственных связях на явления микромира. Поэтому было бы интересно изучить случай, в котором область воздействия P_a «оторвана» от события a, т. е. точка a является изолированной точкой множества P_a. На необходимость такого исследования указал в 1973 г. А. Д. Александров. Ниже мы излагаем результаты, содержащиеся в статьях [13], [27], [29].

(7.1) Аксиома G_1. *Область воздействия* P *удовлетворяет следующим условиям*:

(1) $P = \{e\} \cup Q$, где Q — *открытое или замкнутое множество с внутренними точками, замыкание которого не содержит точки* e;

(2) P *лежит внутри некоторого выпуклого конуса с острой вершиной* e (*«острая вершина» — значит конус не содержит никакой прямой*).

Определение 1. Положим

$$C = \overline{\bigcup_{x \in \operatorname{int} Q} l^+(e, x)}.$$

Конус C с вершиной e будем называть *внешним конусом* множества P.

Определение 2. *Область воздействия* P называется k-*линейчатой*, где $k = 1, 2, 3, 4$, если существуют лучи $l_1^+(e, x_1), \ldots, l_k^+(e, x_k)$, не лежащие в одной $(k-1)$-мерной плоскости и удовлетворяющие условиям:

(а) $l_i^+(e, x_i) \subset C$ $(i = 1, \ldots, k)$;

(б) для любой прямой λ, параллельной любому из лучей $l_i^+(e, x_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$, множество $\lambda \cap Q$ либо пусто, либо является лучом.

Множество P, не являющееся k-линейчатым ни для какого $k = 1, 2, 3, 4$, будем называть *нелинейчатым*.

Аксиома G_2. *Область воздействия* P *является* 4-*линейчатым множеством.*

Теорема 1 [27]. *Пусть выполняются аксиомы* A_1, G_1, G_2. *Тогда любое* P-*изотонное отображение* $f : V \to V$ *либо является аффинным преобразованием, либо* P — *квазицилиндр и* f *имеет вид*

(1) $$f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_p,$$

где f_0 *— аффинное преобразование, а* d_i *есть смещение* $d_{E_i l_i}$ *или* $d_{E_i L_i}$ [1]. *Причем порядок, в котором в формуле* (1) *стоят* d_i, *несущественен.*

Теорема 2 [13], [29]. *Пусть выполняются аксиомы* A_1, G_1, G_2. *Тогда* P *задает порядок с условием* A_3 *тогда и только тогда, когда* Q *— множество, выделяемое из конуса* C *с вершиной* e *и с аффинной группой, транзитивной внутри него, плоскостями, отсекающими от* C *постоянный объем. При этом группа* G_e *является унимодулярной подгруппой этой аффинной группы.*

Теорема 2 получается из теоремы 1; нетрудно видеть, что G_e будет в условиях теоремы 2 сохранять внешние конусы C_a.

(7.2) Аксиома G_3. *Не существует* m-*мерной плоскости* ($1 \leqslant m \leqslant 3$), *проходящей через точку* e, *которая отображается на саму себя при любом изотонном отображении* $g \in G_e$.

Теорема 1′ [29]. *Пусть выполняются аксиомы* A_1, G_1, G_3. *Тогда справедливо утверждение теоремы* 1.

Теорема 2′ [29]. *Теорема* 2 *остается справедливой, если заменить аксиому* G_2 *на аксиому* G_3.

(7.3) Сформулируем теперь основной результат этого параграфа.

Теорема 3 [29]. *Пусть выполняются аксиомы* A_1, G_1, A_3 *и* G_2. *Предположим, что внешний конус* C *не является квазицилиндром или* 4-*гранным углом. Тогда*

1) C *— замкнутый эллиптический конус;*

2) G_e *— однородная группа Лоренца;*

3) *существует декартова система координат* x_1, x_2, x_3, x_4, *в которой* ∂Q *задается с помощью отношений* $x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \mu^2$, $x_4 > 0$, *где* $\mu = \mathrm{const} \neq 0$, *а конус* $C = \{x \in V : x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0,\ x_4 \geqslant 0\}$, *точка* e *имеет координаты* (0, 0, 0, 0).

Аксиому G_2 можно заменить аксиомой G_3.

(7.4) Итак, для того чтобы установить псевдоевклидовость геометрии пространства-времени, совсем не обязательно предполагать наличие причинно-следственных связей в области микроявлений. Группа Лоренца — следствие причинных взаимодействий макромира, а структура микромира, в определенной мере,— лишь порождение этой фундаментальной симметрии пространства-времени.

§ 8. Времениподобное пространство Минковского

(8.1) В работе [56] Буземан построил теорию времениподобных G-пространств. Частным случаем этой теории являются времениподобные пространства Минковского, имеющие прямое отношение к аксиоматической теории относительности.

Времениподобное пространство Минковского — это непустое множество V, для которого помимо аксиомы A_1, где предполагается, что $\{P_a\}$ задают порядок в V, выполняются следующие аксиомы.

Аксиома B_1. *Множество всех пар* (x, y) *в* $V \times V$ *таких, что* $x < y$ *открыто в* $V \times V$, *и каждая окрестность* U_z *данной точки* z *содержит точки* x, y *с* $x < z$ *и* $z < y$.

Аксиома B_2. *На множестве* ($\leqslant$) *пар* (x, y) *таких, что* $x \leqslant y$, *определена непрерывная функция* $\rho : (\leqslant) \to [0, +\infty)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\rho(x, x) = 0,\ \rho(x, y) > 0 \text{ для } x < y$$

---

[1] Являющиеся отображениями «на».

и

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \leqslant \rho(x, z) \text{ для } x < y < z$$

и инвариантная относительно действия группы T [1]).

Аксиома B_3. *Если* $x_n \leqslant y_n$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ *и неверно, что* $x \leqslant y$, *то* $\rho(x_n, y_n) \to 0$.

Аксиома B_4. *Если* $x_n \to a$, $z_n \to a$ *и* $\rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n) = \rho(x_n, z_n)$, *то* $y_n \to a$.

Аксиома B_5. *Если* $a < b$, *то точка* x *такая, что* $\rho(a, x) + \rho(x, b) = \rho(a, b)$, *существует и замыкание всех таких* x *есть компактное множество.*

Аксиома B_6. *Каждая точка* a *имеет окрестность* U_a *такую, что для* $x, y \in U_a$ *с* $x < y$ *существуют точки* u *и* v *такие, что* $\rho(u, x) + \rho(x, y) = \rho(u, y)$ *и* $\rho(x, y) + \rho(y, v) = \rho(x, v)$.

Аксиома B_7. *Если* $\rho(u_1, x) + \rho(x, y) = \rho(u_1, y)$, $\rho(u_2, x) + \rho(x, y) = \rho(u_2, y)$ *и* $\rho(u_1, x) = \rho(u_2, x)$, *то* $u_1 = u_2$. *Если* $\rho(x, y) + \rho(y, v_1) = \rho(x, v_1)$, $\rho(x, y) + \rho(y, v_2) = \rho(x, v_2)$ *и* $\rho(y, v_1) = \rho(y, v_2)$, *то* $v_1 = v_2$.

(8.2) Положим

$$C = \{x \in V : \rho(e, x) > 0\}.$$

Тогда C есть выпуклый открытый конус в V с вершиной e ([56], с. 30).

Обозначим через Γ группу движений пространства V, причем под движением φ понимаем гомеоморфизм V на себя такой, что $x < y$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) < \varphi(y)$ и $\rho(\varphi(x), \varphi(y)) = \rho(x, y)$. Группа Γ действует дважды транзитивно на V, если для данных $x < y$ и $a < b$ таких, что $\rho(x, y) = \rho(a, b)$, существует движение φ, переводящее x в a и y в b. Через Γ_e обозначим подгруппу движений, оставляющих точку e неподвижной.

Теорема 1 [56]. *Конус* ∂C *во временеподобном пространстве Минковского является эллиптическим, если одно из следующих условий* а), б) *выполняется.*

а) *Подгруппа* Γ_e *транзитивна на множестве образующих конуса* C.

б) *Группа движений* Γ *дважды транзитивна, и сечение конуса* C *гиперплоскостью, не проходящей через* e, *обладает эйлеровой точкой* [2]) *с неисчезающей гауссовой кривизной.*

При любом из названных условий а), б) пространство не обязано быть лоренцевым, т. е. в подходящих аффинных координатах x_1, x_2, x_3, x_4 функция ρ не обязана иметь вид

$$\rho(x, y) = [(x_4 - y_4)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2]^{1/2}.$$

Соответствующие примеры приведены в [56] (с. 42, 43).

Дело здесь в том, что группа движений Γ в подходе Буземана может быть лишь некоторой подгруппой неоднородной группы Лоренца. Вся группа Лоренца получается, например, следующим образом. Группа движений Γ действует трижды транзитивно на V, если для данных $x < y < z$, $x' < y' < z'$ с $\rho(x, y) = \rho(x', y')$, $\rho(x, z) = \rho(x', z')$, $\rho(y, z) = \rho(y', z')$ найдется движение φ такое, что $\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$, $\varphi(z) = z'$.

Теорема 2 [56]. *Временеподобное пространство Минковского с трижды транзитивной группой движения является лоренцевым.*

Следовательно, если через Tr обозначить требование трижды транзитивного действия группы Γ на V, то теорема 2 говорит нам о том, что геометрия пространства-времени характеризуется системой аксиом $\langle A_1, B_1 - B_7, \mathrm{Tr}\rangle$.

---

[1]) См. аксиому A_1.

[2]) В точке Эйлера существует соприкасающийся параболоид [56].

§ 9. Лоренцевы и галилеевы кинематики

(9.1) Одно из интересных направлений аксиоматического построения геометрии пространства-времени развивается Р. И. Пименовым [40]. Идеи Пименова охватывают не только случай геометрии Минковского, но главным образом нацелены на создание аксиоматической теории искривленного пространства-времени. Здесь же мы приведем лишь один результат, касающийся аксиоматизации специальной теории относительности.

(9.2) Предполагаем, что справедлива аксиома A_1, причем P задает порядок на пространстве-времени V.

Аксиома Π_1. *Область влияния P_a есть открытый конус в пространстве V (в смысле* (1.7)).

Говорим, что имеем кинематику, если справедлива система аксиом $\langle A_1, \Pi_1 \rangle$.

Галилеева кинематика представляет собой такую кинематику, в которой для любого $x \in V$ справедливо одно из трех отношений: $(x < e)$, $(e < x)$ или $(\overline{x \in P \setminus \{e\}}$ и $\overline{e \in P_x \setminus \{x\}})$. Лоренцева кинематика определяется как кинематика, для которой в подходящих аффинных координатах x_1, x_2, x_3, x_4

$$e = (0,\ 0,\ 0,\ 0),$$

$$P = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0,\ x_4 > 0\} \cup \{e\},$$

а отношение порядка вводится формулой

$$x < x' \Longleftrightarrow x_4' - x_4 > \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i' - x_i)^2}.$$

(9.3) Назовем допустимым репером в кинематике $\langle V, \leqslant \rangle$ следующий объект: $(a, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, где $a \in V$ — точка; α^1 — луч $\{x : x = a + \lambda a_1, \lambda > 0\}$ при условии, что $a_1 > e$ или $a_1 < e$; α^2 — полуплоскость $\{x : x = a + \mu a_1 + \lambda a_2,\ \lambda > 0\}$; ... ; α^4 — полупространство $\{x : x = a + \sum_{i=1}^{3} \mu_i a_i + \lambda a_4,\ \lambda > 0\}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ входят в определение α^k.

Обозначим через G множество всех P-изотонных биекций пространства V на себя. Очевидно, G — группа.

Аксиома Π_2. *Группа G действует просто транзитивно на множестве всех допустимых реперов.*

Теорема. *Пусть выполнены аксиомы* A_1, Π_1, Π_2. *Тогда кинематика $\langle V, \leqslant \rangle$ есть либо галилеева, либо лоренцева* ([40], с. 49).

§ 10. Аксиоматическое определение групп Галилея и Лоренца [19]

(10.1) Изложим систему аксиом, которая направлена на определение группы движений пространства-времени, но не касается выяснения структуры самого многообразия событий.

Пусть M — множество элементов, интерпретируемых как «события». В M выделено семейство D подмножеств, называемых *инерциальными движениями*. Кроме того, задано семейство K биекций M на $\mathbb{R}^4$ [1]), называемых инерциальными системами отсчета.

Предполагаем, что выполняются следующие условия:

1) Если $S \in K$ и множество I таково, что $S(I) \subset \mathbb{R}^4$ задается системой уравнений $x_i = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, где $a_i = \text{const}$, то $I \in D$ (т. е. покоящееся относительно S тело находится в инерциальном движении).

2) Если $I \in D$ и $S \in K$, то $S(I) \subseteq \mathbb{R}^4$ задается системой уравнений $x_i = a_i + v \cdot x_4$ $(i = 1, 2, 3)$, где a_i, $v_i = \text{const}$.

---

[1]) Здесь $\mathbb{R}^4$— четырехмерное арифметическое пространство.

Говорим, что S' покоится относительно S, если всякое множество I, задаваемое в S' уравнениями вида $x_i = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $a_i = \mathrm{const}$, задается в S уравнениями того же вида. Если неверно, что S' покоится относительно $S(S, S' \in K)$, будем говорить, что S' движется относительно S.

Линейное преобразование $\mathbb{R}^4$ с матрицей $\| a_{ij} \|_{i,\, j=1}^{4}$ назовем тривиальным, если матрица третьего порядка $\| a_{\alpha\beta} \|_{\alpha,\, \beta=1}^{3}$ ортогональна и $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$, $a_{44} = 1$, $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$.

(10.2) Рассмотрим следующую систему аксиом.

А к с и о м а Б$_1$. *Существуют такие S, $S' \in K$, что S' движется относительно S.*

А к с и о м а Б$_2$. а) *Если $S \in K$, φ — тривиальное преобразование, то существует $S' \in K$ такое, что $S \circ S'^{-1} = \varphi$.*

б) *Если S, $S' \in K$ и S' покоится относительно S, то $S \circ S'^{-1}$ — тривиальное преобразование.*

А к с и о м а Б$_3$. *Если $I \in D$, $S \in K$, φ — тривиальное преобразование, то существует такое $\tilde{I} \in D$, что $S(\tilde{I}) = \varphi(S(I))$.*

А к с и о м а Б$_4$. *Если S_1, S'_1, $S_2 \in K$, то существует такое $S'_2 \in K$, что $S_2 \circ S'^{-1}_2 = S_1 \circ S'^{-1}_1$.*

Т е о р е м а [19]. *Если для множества M выполнена система аксиом $\langle$ Б$_1$ — Б$_4 \rangle$, то имеются две исключающие друг друга возможности:*

1) *$G = \{S \circ S'^{-1} : S' \in K\}$, где $S \in K$ — произвольный элемент, есть группа Галилея.*

2) *Группа G имеет вещественный параметр $c > 0$ и совпадает с неоднородной группой Лоренца.*

ГЛАВА 2
ОТОБРАЖЕНИЯ СЕМЕЙСТВ КОНУСОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 11. Отображения эллиптических конусов

(11.1) Пусть A^n — аффинное пространство $(n \geqslant 3)$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — декартовы координаты в A^n. Обозначим через x^2 квадратичную форму:

$$x^2 \equiv x_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2.$$

Под преобразованием Лоренца понимаем линейное биективное преобразование, сохраняющее форму x^2 с точностью до параллельных переносов.

Для пары точек x, $y \in A^n$ рассмотрим три симметричных отношения:

$$\text{(I)}\ (x-y)^2 = 0, \qquad \text{(II)}\ (x-y)^2 \geqslant 0, \qquad \text{(III)}\ (x-y)^2 > 0$$

и три соответствующих антисимметричных отношения (I+) — (III+), полученные из (I) — (III) добавлением условия $x_n \leqslant y_n$.

Т е о р е м а 1 [14]. *Если биективное отображение $f : A^n \to A^n$ и его обратное f^{-1} сохраняют одно из шести отношений* (I) — (III+), *то f есть преобразование Лоренца с точностью до подобия.*

Переформулируем эту теорему в терминах конусов. Определим множества:

(1) $C_x = \{y : (x-y)^2 = 0\}$ — поверхностный двойной конус с вершиной x;

(2) $K_x = \{y : (x-y)^2 \geqslant 0\}$ — телесный замкнутый двойной конус;

(3) $Q_x = \{y : (x-y)^2 > 0\}$ — телесный открытый двойной конус.

Добавляя условие $x_n \leqslant y_n$, мы определим множества:

(1+) C_x^+ — поверхностный ординарный конус с вершиной x;

(2+) K_x^+ — телесный замкнутый ординарный конус;

(3+) Q_x^+ — телесный открытый ординарный конус.

Условие сохранения отображениями f и f^{-1} отношений (I) — (III+) эквивалентно условию $f(M_x) = M_{f(x)}$, где M_x — одно из множеств C_x, K_x, ..., Q_x^+.

Теорема 1'. *Если биективное отображение* $f: A^n \to A^n$ $(n \geqslant 3)$ *удовлетворяет условию* $f(M_x) = M_{f(x)}$ *для любой точки* $x \in A^n$, *где* M_x — *множество одного из шести указанных типов* (1) — (3+), *то* f *есть преобразование Лоренца с точностью до подобия* [14].

(11.2) Физическое содержание теоремы 1. Отношения (I+) — (III+) и (I) — (III) можно интерпретировать как существование соответственно воздействия и связи между событиями x и y, происходящих посредством: (I) прямого распространения света; (II) распространения света и механическим образом (т. е. посредством посылки частицы с ненулевой массой покоя от x к y либо от y к x); (III) механическим путем либо с помощью отраженного света.

В случаях (I+) — (III+) мы говорим о воздействии x на y, подчеркивая тем самым причинный характер рассматриваемого отношения между событиями x и y.

Рассмотрение отношений (I) — (III+) связано с существованием инерциальных систем отсчета. Инвариантность отношений относительно биекций пространства-времени V выражает собой закон постоянства скорости света. Следовательно, физическое содержание теоремы 1 заключается в том, что преобразования Лоренца — ядро специальной теории относительности — могут быть выведены из закона постоянства скорости света в любой из принятых форм (I) — (III+) и евклидовости пространства без привлечения принципа относительности [2]. Последний, как известно, говорит о равноправности всех инерциальных систем отсчета, т. е. систем отсчета, в которых закон распространения света задается отношением (I), или о том, что выражения физических законов инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Поскольку отношения (II+) и (III+) задают частичный порядок в пространстве V, то теорема 1 в этих случаях говорит о том, что «причинность влечет группу Лоренца» [80], [14].

(11.3) Теорема 1 для случая (I) была впервые установлена в 1949 г. А. Д. Александровым [1]. Случаи (I+), (II+) были изучены в статье А. Д. Александрова и В. В. Овчинниковой [2] в 1953 г. В 1964 г. Е. Зиман [80] опубликовал работу, посвященную случаям (I+) и (III+).

Наконец, в 1972 г. Борхерс и Хегерфельд [55] повторили теорему 1 для случая (I) и рассмотрели случай (II). Случай (II) был доказан в [6].

(11.4) Заметим, что отношения (I) — (III) сохраняются при следующих отображениях, отличных от преобразований Лоренца:

1) гомотетиях H: $x' = \lambda x + a$ $(\lambda \neq 0$, не исключая $\lambda < 0$; допуская $\lambda = 1$, мы относим к гомотетиям переносы);

2) инверсиях I_a: $x \to \dfrac{x-a}{(x-a)^2} + a$;

3) особых двойных инверсиях

$$J_{ca}\colon\ x \to \frac{x-a+c\,(x-a)^2}{1+2c\,(x-a)} + a,$$

где вектор $c \neq 0$ таков, что $c^2 = 0$, а в остальном произволен.

Причем инверсия I_a не определена на конусе C_a: $(x - a)^2 = 0$, а инверсия J_{ca} — на плоскости P_{ca}: $1 + 2c(x - a) = 0$. Поэтому эти отображения следует рассматривать не на всем пространстве A^n, а на связном подмножестве $D \subset A^n$, где они определены.

Теорема 2 [15]. *Пусть* f: $D \to A^n$ — *взаимно однозначное отображение области* $D \subset A^n$, *сохраняющее одно из отношений* (I) — (III+) *вместе с его отрицанием. Тогда* f *есть либо однородное преобразование Лоренца* L

с гомотетией H, либо может быть представлено как такое преобразование с добавлением инверсии I или особой двойной инверсии J. Иначе говоря, f приводится к одному из трех видов HL, HLI, HLJ, причем в двух последних случаях оно может быть приведено также к виду IHL и соответственно JHL.

Теорема 2а [15]. *Пусть f: $D \to A^n$ — взаимно однозначное отображение области $D \subset A^n$ такое, что для каждого конуса M_x одного из шести типов (1) — (3⁺) при всякой $x \in D$ оказывается*

$$f(M_x \cap D) = M_{f(x)} \cap f(D).$$

Тогда f — такое, как в теореме 2.

§ 12. Конформное пространство [15]

Пространство V можно дополнить «бесконечно удаленным» конусом, на который при любой инверсии отображается ее особый конус. Получаем пространство C, на которое преобразования L, H, I, J распространяются в качестве его взаимно однозначных отображений (и непрерывных при естественном определении топологии C).

Пространство C называется конформным, потому что конформные отображения областей в A^n — это преобразования L, H, I, J и их комбинации — те же HL, HLI, HLJ, так что дополнение A^n до C регуляризирует конформные отображения. То, что конформные отображения — это HL, HLI, HLJ, хорошо известно при $\dim A^n < \infty$ (см., например, [45]). При пополнении A^n до C пополняются и конусы C_x, K_x, так что в C имеются в виду эти пополненные конусы. Каждая изотропная прямая пополняется «бесконечно удаленной» точкой и становится, таким образом, замкнутой.

Пространство C при исключении из него любого конуса C_x превращается в A^n. Отображение, которое в A^n является отражением в плоскости, оказывается в C инверсией. Выделение особых двойных инверсий теряет смысл, поскольку инверсии не имеют на C особенностей [1]).

Поэтому естественно выделить на C только три вида отображений: 1) гомотетии H^C, 2) преобразования Лоренца L^C без отражений, 3) инверсии I^C, т. е. такие (гомеоморфные) отображения C на себя, которые при исключении из C подходящего конуса превращаются в названные.

Теорема 1 [15]. *Отображение f: $D \to C$ области $D \subset C$, удовлетворяющее тем же условиям, что в теореме 2а из § 11, является либо $H^C L^C$, либо $H^C L^C$ с добавлением одной или двух инверсий I^C.*

Замечание. В теореме 1 имеются в виду отношения (I) — (III) (см., однако, [15], с. 9).

Пространство C гомеоморфно произведению сферы на окружность. Поэтому существует накрывающее его пространство $\tilde{C}$, гомеоморфное произведению сферы на прямую. В нем естественно индуцируется геометрия, локально совпадающая с геометрией в C. Изотропные прямые в $\tilde{C}$ уже не замкнуты, так что можно выделить ординарные конусы $C_x^\pm$, $K_x^\pm$ и $Q_x^\pm$. На $\tilde{C}$ распространяются отображения H^C, L^C, I^C, и из теоремы 1 следует

Теорема 2 [15]. *Сказанное в теореме 1 применимо соответственно к пространству $\tilde{C}$. При этом условие для ординарных конусов имеет смысл рассматривать не только локально, но и в целом.*

---

1) Выделение инверсий J_{ca} в A^n имело тот смысл, что они определены на полупространствах, тогда как инверсии I_a — на областях, на которые A^n разбивают их особые конусы.

§ 13. Простейшие аксиоматизации пространства-времени [15]

(13.1) Теоремы 1, 2 из §§ 11, 12 означают, что одно сохранение любого из перечисленных шести отношений (I) — (III$^+$) вместе с его отрицанием без всяких дополнительных условий уже обеспечивает определенный характер возможных преобразований пространства-времени. При естественном требовании, что эти преобразования образуют группу, нет необходимости требовать сохранения вместе с данным отношением его отрицания, так как оно обеспечивается сохранением отношения при обратном преобразовании. Если ограничиваться только неограниченно продолжаемыми преобразованиями, то инверсии I_a и J_{ca} в плоском пространстве-времени Минковского V отпадают и остаются только преобразования Лоренца с гомотетиями. Но в случае пространств C и $\widetilde{C}$ любые локально допустимые преобразования неограниченно продолжаемы и соответственно в этих пространствах действуют группы всех конформных преобразований.

Требование, чтобы преобразования образовывали группу, влечет те же результаты, что и требование их продолжаемости. Заметим, что это последнее не означает рассмотрения мира в целом, как продолжаемость натурального ряда не означает рассмотрения его как актуально бесконечного. Считая в соответствии с известным общим взглядом на геометрию, что геометрия пространства-времени определяется группой преобразований, мы заключаем из теорем 1, 2 из §§ 11, 12, что каждое из шести отношений (I) — (III$^+$) определяет в этом смысле геометрию пространства-времени.

Помимо пространства Минковского V имеем две модели C и $\widetilde{C}$ для пространства-времени, в которых геометрия определяется одним из отношений (I) — (III$^+$). Модели эти рассматривались И. Сегалом в [78] в связи с космологией.

(13.2) В соответствии со сказанным выше введем следующие аксиомы.

Аксиома $\mathrm{I_V}$. 1) *На пространстве V задано отношение* (I), *которое сохраняется множеством биекций G пространства* $\boldsymbol{V}$, *образующих группу*; 2) *G содержит все биекции, сохраняющие отношение* (I).

Аналогично формулируются аксиомы $\mathrm{II_V}$ — $\mathrm{III_V^+}$, $\mathrm{I_C}$ — $\mathrm{III_C}$, $\mathrm{I_{\widetilde{C}}}$ — $\mathrm{III_{\widetilde{C}}^+}$.

Следовательно, геометрия Минковского аксиоматизируется с помощью любой из аксиом $\mathrm{I_V}$, . . ., $\mathrm{III_V^+}$, конформное пространство C — с помощью одной из аксиом $\mathrm{I_C}$, $\mathrm{II_C}$, $\mathrm{III_C}$ и, наконец, пространство $\widetilde{C}$ определяется аксиоматиками с аксиомами $\mathrm{I_{\widetilde{C}}}$, . . ., $\mathrm{III_{\widetilde{C}}^+}$ [1]).

(13.3) Аксиоматика Бергера [53]. Рассмотренные отношения (I) — (III) являются симметричными. Одно из них, отношение (II), было положено Бергером в основу аксиоматического построения геометрии Минковского. Предложенная им аксиоматика содержит целый ряд предположений, которые вынуждают автора говорить о том, что метрическая структура мира определяется как его причинной структурой, так и топологической. Последнее как раз не играет существенной роли в аксиоматике $\mathrm{II_V}$. Поэтому аксиомы Бергера следует рассматривать как усложненный вариант аксиоматики $\mathrm{II_V}$.

§ 14. Теоремы о конечном числе источников света

(14.1) В 1974 г. при обсуждении теоремы 1′ из § 11 на семинаре А. Д. Александрова по хроногеометрии в Новосибирском университете А. П. Копыловым была высказана гипотеза, что в формулировке теоремы можно отказаться от необходимости накладывать условия на *все* конусы, параллельные конусу C^+ (см. § 11).

---

1) Берется одна из перечисленных аксиом. Следует отметить, что вопрос об аксиоматизации геометрий C и $\widetilde{C}$ остается открытым (см. § 28, задача 2).

В дальнейшем им была доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* F — *подмножество гиперплоскости* $H_0 = \{x_n = 0\}$ *таково, что для любой сферы* S^{n-2} $(n \geqslant 3)$, *лежащей в* H_0 *и имеющей центр в точке* $(0, \ldots, 0) \in A^n$, *множество* $\xi[F \setminus \operatorname{conv} S^{n-2}]$ (*где* ξ — *центральная проекция* $H_0 \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ *из центра* $(0, \ldots, 0)$ *на сферу* S^{n-2}) *всюду плотно в* S^{n-2}. *Обозначим через* D *множество точек всех прямых, параллельных оси* x_n, *такое, что* $D \cap H_0 = F$. *Тогда каждое биективное отображение* $f\colon A^n \to A^n$ $(n \geqslant 3)$ *такое, что для каждой точки* $x \in D$ $f(C_x^+) = C_{f(x)}^+$, *является преобразованием Лоренца с точностью до подобия.*

(Доказательство не опубликовано.)

Эта теорема была обобщена А. В. Кузьминых, результаты которого излагаются в этом параграфе.

(14.2) Теорема 2 [34]. *Существует множество* $D_1 \subset A^n$ $(n \geqslant 3)$, *являющееся объединением* $((9n - 7)/2)$ (*если* n *нечетно*) *или* $((9n - 4)/2)$ (*если* n *четно*) *прямых, параллельных оси* x_n, *такое, что каждое биективное отображение* $f\colon A^n \to A^n$, *удовлетворяющее условию:* $f(C_x^+) = C_{f(x)}^+$ *для любой точки* $x \in D_1$, *является преобразованием Лоренца с точностью до подобия.*

Теорема 3 [34]. *Пусть* $T_0 \subset H_0$, *где* H_0 *есть гиперплоскость* $x_n = 0$,— *множество, состоящее из* n *точек в общем положении, такое, что для некоторых трех его точек* x, y, z *отношение расстояний* $|x - y|/|x - z|$ ($|x - y|$ — *евклидова метрика в* A^n) *иррационально. Через* D_2 *обозначим множество, являющееся объединением точек прямых, параллельных оси* x_n, *такое, что* $D_2 \cap H_0 = T_0$. *Каждое биективное отображение* $f\colon A^n \to A^n$ $(n \geqslant 3)$, *удовлетворяющее условию:* $f(C_x) = C_{f(x)}$ *для любой точки* $x \in D_2$, *является преобразованием Лоренца с точностью до подобия.*

Замечание 1. В работе [34] дается способ построения множества D_1.

Замечание 2. Число прямых в теореме 3 не может быть уменьшено: для каждых двух прямых l_1 и l_2 из A^3, параллельных оси x_n, существует разрывное отображение $\varphi\colon A^3 \to A^3$ такое, что для каждой точки $x \in l_1 \cup l_2$ $\varphi(C_x) = C_{\varphi(x)}$.

(14.3) А. В. Кузьминых давал следующую физическую интерпретацию теореме 2. Она «означает, что взаимно однозначное преобразование пространства-времени на себя, сохраняющее постоянство скорости света, испускаемого некоторыми шестнадцатью источниками, покоящимися в некоторой инерциальной системе отсчета, есть преобразование Лоренца» [34].

(14.4) Если под $(I_V^+ \mid D_1)$, $(I_V \mid D_2)$ понимать ограничение первого аргумента отношений (I^+), (I) на множествах D_1 и D_2 соответственно, то можно рассмотреть аксиоматики $\mathrm{I}_V^+ \mid \mathrm{D}_1$ и $\mathrm{I}_V \mid \mathrm{D}_2$, определяющие геометрию Минковского.

§ 15. Отображение строго выпуклых конусов [11]

(15.1) Рассматриваем аффинное пространство A размерности, большей 2, хотя бы бесконечномерное, т. е., иными словами, топологическое линейное пространство с переносами и выпуклыми окрестностями.

Под конусом понимается множество, образуемое лучами — образующими конуса, исходящими из одной точки — вершины конуса. Образующую назовем крайней, если во всяком содержащем ее сечении конуса двумерной плоскостью (2-плоскостью) нет других образующих, в угле между которыми она лежала бы (имея в виду выпуклый угол).

Конус назовем строго выпуклым, если он обладает следующими свойствами:

а) Сечение конуса всякой 2-плоскостью, содержащей хотя бы одну образующую, представляет выпуклый угол, причем его стороны принадлежат ему, т. е. являются крайними образующими конуса. При этом все такие образующие — крайние.

б) Конус имеет как крайние, так и некрайние образующие.

Теорема 1 [11]. *Пусть K — строго выпуклый конус в аффинном пространстве A. Пусть f — биективное отображение пространства A на аффинное пространство A' такое, что для любой точки $x \in A$ $f(K_x)$ есть конус $K'_{x'}$, причем конусы $K'_{x'}$ получаются друг из друга переносом. Тогда f переводит прямые пространства A в прямые пространства A'. Поэтому в случае конечномерного пространства это отображение аффинно.*

(15.2) Пусть K_x^- — конус, симметричный конусу K_x относительно его вершины x. Говорим, что топология в A определена конусом K, если базис окрестностей образуется пересечениями $K_y \cap K_x^-$, где x лежит на некрайней образующей конуса K_y.

Конус можно назвать строго выпуклым, если он представляет собой замкнутое выпуклое множество с внутренними точками и всякая его опорная плоскость содержит не более одной образующей (предполагается, что конус не простирается на все пространство). Легко видеть, что конус, строго выпуклый в этом смысле, обладает свойствами а), б). Обратное — что конус со свойствами а), б) будет строго выпуклым в смысле только что данного определения — само собой верно в конечномерном пространстве. При $\dim A = \infty$ это может быть и не так.

Теорема 1а [11]. *Если в условиях теоремы 1 конус K — строго выпуклый в смысле только что данного определения, то отображение переводит прямые пространства A в прямые пространства A' и будет непрерывным, если топология в A' определена конусом K'. Если к тому же топология в A определена конусом K, то f будет гомеоморфным.*

Так как при отображении f прямые переходят в прямые, то конус K' будет обладать свойствами а), б).

Теорема 2 [11]. *Теорема 1 остается верной, если в ней конус — такой, что его выпуклая оболочка удовлетворяет условиям* а), б).

(15.3) Под двойным конусом с вершиной x понимаем множество $K_x \cup K_x^-$. Конусы K_x, K_x^- —«половины» двойного конуса.

Теорема 3 [11]. *Пусть K — двойной конус с выпуклой половиной, удовлетворяющей условиям* а), б) *в пространстве A. Пусть f — инъективное отображение A в A', переводящее конусы K_x в двойные конусы $K'_{x'}$, получаемые переносами из некоторого K'. Тогда f переводит прямые пространства A в прямые пространства A' и, следовательно, аффинно, если A конечномерно.*

Отображение f переводит половины конусов K_x в половины конусов $K'_{f(x)}$. Поэтому, в частности, непрерывность (гомеоморфность) отображения f обеспечивается так же, как в теореме 1а.

Подчеркнем, что в теореме 3 отображение f не предполагается отображением на A'. Аналогично усиливается теорема 2.

Теорема 2а [11]. *Утверждение теоремы 2 верно, если f предполагается отображением в пространство A', но не обязательно на A'.*

(15.4) Теорема 4 [11]. *В теореме 3 конус K можно считать границей двойного конуса со строго выпуклой половиной.*

Нетрудно заметить, что теоремы 1—4 обобщают теоремы 1,1′ из § 11.

§ 16. Сколько инерциальных систем отсчета?

(16.1) Мы предполагали, что распространение света в некоторой системе отсчета описывается системой равных и параллельных конусов. При переходе к другой системе отсчета имели также систему равных и параллельных конусов. Следовательно, инерциальных систем отсчета должно быть более чем одна! В работе [2] в связи с этим формулировался следующий физический закон: всякое преобразование Лоренца возможно.

Однако это, на наш взгляд, сильная формулировка действительного физического закона. В ослабленном виде следует постулировать лишь возможность движения относительно инерциальной системы отсчета, т. е. следует допустить, что существует преобразование, переводящее систему равных и параллельных эллиптических конусов в некоторую систему конусов, необязательно равных, не обязательно параллельных. Одновременно это означает отказ от закона постоянства скорости света, как аксиомы, при выводе преобразований Лоренца.

Итак, не только отказ от принципа относительности (см. § 11, (11.2)), но и отказ от закона постоянства скорости света?

Утвердительный ответ на такой вопрос стал возможным после того, как в 1974 г. А. В. Шайденко показала, что от требования параллельности эллиптических конусов в образе можно отказаться и при этом по-прежнему получать преобразования Лоренца.

В этом параграфе мы излагаем результаты, полученные А. Д. Александровым, А. П. Копыловым, А. В. Кузьминых и А. В. Шайденко, существенно обобщающие упомянутую выше теорему А. В. Шайденко.

(16.2) Рассмотрим аффинное n-мерное пространство A^n ($n \geqslant 3$). Пусть K — строго выпуклый конус. Крайние образующие этого конуса образуют «поверхностный» конус ∂K. Образующие, не являющиеся крайними, образуют «открытый» строго выпуклый конус $\mathring{K} \cup \{e\}$, где e — вершина K. В обычной топологии пространства A^n конус K замкнут, ∂K — граница K, множество $\mathring{K}$ — открытое. Поэтому далее пишем названия указанных конусов — замкнутый, открытый, поверхностный — без кавычек. Если конус состоит из прямых, то его образующими мы называем эти прямые, а сам конус — двойным.

Если K — замкнутый строго выпуклый конус и K^- — конус, симметричный K относительно вершины, то $K \cup K^-$ представляет собой двойной замкнутый конус; мы называем его двойным строго выпуклым конусом. Соответветственно определяются двойной поверхностный $\partial K \cup \partial K^-$ и двойной открытый $\mathring{K} \cup \mathring{K}^- \cup \{e\}$ конусы. В противопоставление двойному конусу, конус, образующие которого — лучи, называем ординарным.

Итак, рассматриваем шесть типов строго выпуклых конусов, три ординарных:

(I_0) замкнутый K,

(II_0) поверхностный ∂K,

(III_0) открытый $\mathring{K} \cup \{e\}$ (где e — вершина K)

и соответственно три двойных:

(IV) замкнутый $K \cup K^-$,

(V) поверхностный $\partial K \cup \partial K^-$,

(VI) открытый $\mathring{K} \cup \mathring{K}^- \cup \{e\}$.

Теорема 1 [17]. *Пусть Q — строго выпуклый конус одного из шести указанных типов. Пусть f: $A^n \to A^n$ ($n \geqslant 3$) — биекция такая, что для всякой точки x множество $f(Q_x)$ есть строго выпуклый конус, гомеоморфный Q. Тогда f аффинно.*

Оказывается, что в теореме можно отказаться от требования гомеоморфности $f(Q_x)$ и Q. А именно, имеет место

Теорема 2 [47]. *Пусть $Q \subset A^n$ ($n \geqslant 3$) — строго выпуклый конус одного из типов (I_0) — (VI) и f: $A^n \to A^n$ — биекция такая, что для каждой точки $x \in A^n$ $f(Q_x)$ — строго выпуклый конус, причем, когда Q — двойной поверхностный, предполагается дополнительно, что $f(x)$ — вершина конуса $f(Q_x)$. Тогда f аффинно.*

(16.3) Естественно возникает вопрос: «Что можно сказать об отображении f, если не предполагать, что $f(Q_x)$ является конусом?». Если допустить, что множества $f(Q_x)$ получаются друг из друга переносами, то справедлива следующая

Теорема 3 [47]. *Пусть $Q \subset A^n$ ($n \geqslant 3$) — двойной телесный замкнутый строго выпуклый конус, т. е. конус типа* (IV). *Пусть $M \subset A^n$ — множество, удовлетворяющее условиям:*

а) $M = \overline{\operatorname{int} M}$;

б) *M связно, и существует точка $e \in M$ такая, что $M \setminus \{e\}$ распадается на две компоненты связности, причем e такая, что $M \setminus \{e\}$ несвязно, единственна;*

в) *существует такой двойной телесный замкнутый строго выпуклый конус Q', что $M \subset Q'$.*

Тогда биекция f: $A^n \to A^n$ такая, что для каждой точки x $f(Q_x)$ получается из M переносом, является аффинной.

(16.4) Наконец, дополнительно к вопросу, сформулированному в пункте (16.3), можно задать вопрос о существенности требования, заключающегося в том, что образы *всех* конусов, получаемых переносами из конуса K, получаются переносами из множества $f(K)$ (см. § 14).

Ответ на эти два вопроса дает следующая

Теорема 4 [35]. *Существует множество $D \subset A^n$ ($n \geqslant 3$), обладающее свойствами:*

1) *для каждой пары H_1, H_2 гиперплоскостей, параллельных гиперплоскости $x_n = 0$, множество $D \cap \operatorname{conv}(H_1 \cup H_2)$ конечно;*

2) *для каждого двойного замкнутого строго выпуклого конуса $Q \subset A^n$ каждое биективное отображение f: $A^n \to A^n$ такое, что для любой точки $x \in D$ множество $f(Q_x)$ есть объединение двух замкнутых выпуклых пересекающихся множеств* [1]*, является аффинным.*

Замечание 1. Для ординарных конусов не существует аналога теоремы 4 (см. [35]).

Замечание 2. Множество D строится следующим образом. Обозначим через B_k ($k = 1, 2, \ldots$) множество $\{(x_1, \ldots, x_n)$: $x_1 = l_1/m_1, \ldots, x_n = l_n/m_n$, где $l_1, \ldots, l_n, m_1, \ldots, m_n$ — целые числа; $|m_1| \leqslant k, \ldots, |m_n| \leqslant k$; $m_i \neq 0$ ($i = 1, \ldots, n$); $|x_n| \geqslant k\}$. Через B' обозначим множество $\{(x_1, \ldots, x_n)$: $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < x_n^4\}$. Тогда

$$D = B' \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big).$$

§ 17. Аксиоматика теории относительности

(17.1) Пусть $D \subset V$ — множество из теоремы 4 § 16.

Аксиома H_1. *На пространстве $D \times V$ задано отношение* II $[D]$ *такое, что $(x, y) \in$ II $[D]$ тогда и только тогда, когда $(x - y)^2 \geqslant 0$.*

Аксиома H_2. 1) *Существует группа биекций G пространства V на себя такая, что если $f \in G$ и $K_x = \{y \in V$: $(x, y) \in$ II $[D]\}$, где $x \in D$, то $f(K_x)$ есть объединение двух замкнутых выпуклых пересекающихся множеств;* 2) *G содержит все такие биекции.*

Теорема. *Система аксиом $\langle \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2 \rangle$ определяет геометрию Минковского, причем G совпадает с группой Лоренца (исключая подобие).*

Данная теорема — всего лишь переформулировка теоремы 4 из § 16 для случая конусов K_x, заданных отношением (II) из § 11.

---

[1] Здесь не предполагается, что $f(Q_x)$ и $f(Q_y)$ ($x \neq y$) параллельны.

(17.2) На наш взгляд, аксиоматика $\langle \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2 \rangle$ — самое значительное достижение в решении задачи построения аксиоматической теории относительности. В ней объединяется идея отказа от закона постоянства скорости света (см. § 16) с идеей постулирования принципа доступности наблюдениям для каждого конечного отрезка времени лишь конечного числа кратковременно действующих (точечных) источнико-приемников света.

(17.3) Аксиоматика $\langle H_1, H_2 \rangle$ сложилась в результате работы четырех новосибирских математиков: А. Д. Александрова, А. П. Копылова, А. В. Кузьминых и А. В. Шайденко.

§ 18. Отображение произвольных конусов

(18.1) Под конусом в аффинном пространстве A^n $(n \geqslant 2)$ понимается множество точек C, состоящее из лучей с началом в точке e, которую называем вершиной конуса.

Предполагаем, что C удовлетворяет следующим условиям:

1) C не содержится в плоскости;

2) $\overline{C}$ имеет острую вершину.

Будем рассматривать инъективные непрерывные отображения f пространства A^n в аффинное пространство A^m, удовлетворяющее условиям:

а) для каждой $x \in A^n$ множество $f(C_x)$ получено из $f(C)$ с помощью переноса t: $e' \to f(x)$, где $e' = f(e)$;

б) замыкание конуса, который проектирует $f(C)$ из точки e', имеет острую вершину.

(18.2) Т е о р е м а 1 [9], [10]. *Отображение аффинно, исключая случай, когда C есть квазицилиндр вида*

$$C = Z \cup (C \cap E), \tag{1}$$

где Z образовано открытыми лучами, параллельными некоторому лучу L, а начала этих лучей лежат на плоскости E.

Конус C может допускать различные представления вида (1) с различными парами L, E, но число таких пар не превышает $n = \dim A^n$.

Т е о р е м а 2 [9], [10]. *Если конус C допускает k представлений* (1) *с парами $L_1, E_1, \ldots, L_k, E_k$, то*

$$f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_k, \tag{2}$$

где f_0 — аффинное отображение A^n в A^m, и каждое d_i есть смещение $d_{E_i L_i}$ (см. гл. 1, § 2, (2.4)). *Порядок, в котором стоят d_i, несуществен. Обратно, каждое отображение вида* (2) *удовлетворяет условиям* а), б) *для изучаемых нами отображений. Причем $f(C) = (f_0 \circ t)(C)$, где t — перенос. Поэтому $f(C)$ — всегда аффинный образ конуса C.*

З а м е ч а н и е. Образ $f(A^n)$ есть область в некотором подпространстве $A'^n \subset A^m$. В случае теоремы 1 имеем $f(A^n) = A'^n$, но в случае теоремы 2 может случиться $f(A^n) \neq A'^n$, так как любое из d_i в (2) может не отобразить A^n на себя, а на открытое полупространство, ограниченное плоскостью, параллельной E_i. Вид $f(A^n)$ определяется формулой (2).

(18.3) В [9] теоремы 1, 2 сформулированы без требования непрерывности отображении f. Однако в доказательстве имеется ошибка (см. [10], с. 5). Доказательство теорем 1 и 2 дано в [10] (теорема 6).

(18.4) Т е о р е м а 3 [5]. *Пусть $\overline{\mathrm{conv}\, C} \neq L \times K$, где K — $(n-1)$-мерный конус. Если биекция f: $A^n \to A^n$ $(n \geqslant 3)$ такова, что $f(C_x) = C_{f(x)}$, то f аффинно.*

§ 19. Отображение дискретных конусов

(19.1) Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Если x, y — два вектора, то под прямой в H, проходящей через точку x, в направлении вектора y, понимаем множество точек $\{x + \tau\cdot y, -\infty < \tau < +\infty\}$. Перенос t в H — это отображение t: $x \to x + t$, где $x \in H$ — произвольный вектор. Говорим, что прямые l_0^α ($\alpha = 1, 2, \ldots$), проходящие через 0, образуют минимальный дискретный конус D_0 с вершиной в точке 0, если направляющие векторы этих прямых таковы, что, выбрасывая из их множества любой вектор, будем получать базис в пространстве H, т. е. полную систему векторов.

Пусть

$$D_x = t(D_0), \quad D_0 = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} l_0^\alpha,$$

где t — такой перенос, что $t(0) = x$.

Теорема 1 [25]. *Если f: $H \to H$ — биективный и непрерывный оператор такой, что $f(D_x) = D_{f(x)}$, то f есть непрерывный аффинный оператор, т. е. непрерывный линейный оператор с точностью до переноса.*

Замечания. 1) Условие непрерывности в теореме существенно, так как можно построить неаффинный оператор, удовлетворяющий условию теоремы. 2) Если из конуса D_0 выбросить хотя бы одну прямую, то утверждение теоремы перестает быть справедливым.

Говорим, что оператор f: $H \to H$ имеет в точке $x \in H$ бесконечный скачок, если существует последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся слабо к x, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| f(x_n) \| = \infty$.

Теорема 2 [25]. *Пусть f: $H \to H$ — биективный оператор, удовлетворяющий условию $f(D_x) = D_{f(x)}$. Для того чтобы оператор f был непрерывным и аффинным, необходимо и достаточно, чтобы он не имел бесконечных скачков ни в одной точке пространства H.*

(19.2) Луч, выходящий из точки x в напревлении вектора y, есть множество точек $\{x + \lambda y, 0 \leqslant \lambda < +\infty\}$. Пусть L_0^α ($\alpha = 1, 2, \ldots$) — множество лучей таких, что семейство порождаемых ими прямых образует минимальный дискретный конус D_0. Пусть $M_0 = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{\infty} L_0^\alpha$ и $M_x = t(M_0)$, где t — перенос, переводящий 0 в x.

Тогда справедлива

Теорема 3. *Если f: $H \to H$ — биективный оператор такой, что $f(M_x) = M_{f(x)}$, то f есть аффинный оператор (непрерывный при $\dim H < \infty$).*

Доказательство. Пусть e_0, e_1, $\ldots$ — направляющие векторы лучей L_0^1, L_0^2, $\ldots$ Векторы e_1, e_2, $\ldots$ образуют базис в H. Для любого $x \in H$ возможно разложение $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i e_i$. Оператор f, как легко видеть, прямые $l_x^\alpha \supset L_x^\alpha$ отображает на прямые $f(l_x^\alpha)$. Найдется непрерывный линейный оператор Q такой, что оператор $F(x) = Q(f(x) - f(0))$ обладает следующими свойствами:

$$F(0) = 0, \qquad F(l_x^\alpha) = l_{F(x)}^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Если записать F в координатах, то k-я координата F_k будет зависеть только от k-й координаты вектора x, т. е. $F_k(x) = F_k(x^1, x^2, \ldots) = F_k(x^k)$. Как показано в [25], справедливо функциональное уравнение

$$F_k(\xi + \eta) = F_k(\xi) + F_k(\eta),$$

где $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Но F переводит луч L_0^k на луч L_0^k. Следовательно, $F_k(\xi) \geqslant 0$ для любого неотрицательного ξ. Тогда, как известно, $F_k(\xi) = a_k\xi$, где $a_k = \mathrm{const}$.

Теорема доказана.

§ 20. Отображения псевдоевклидовых пространств

(20.1) Теорема [68]. *Предположим, что в $\mathbb{R}^n$ определена функция d: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вида*

$$d(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x^i - y^i)(x^j - y^j),$$

где $\| g_{ij} \|$ — симметрическая неособенная матрица с вещественными компонентами и $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$. Пусть f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — биекция такая, что $d(x, y) = \rho$ тогда и только тогда, когда $d(f(x), f(y)) = \rho$. Тогда (исключая случай $\rho = 0$ и $\| g_{ij} \|$ — положительно или отрицательно определенная) $f(x) = Lx + f(e)$ [1]*, где L есть линейная биекция, удовлетворяющая $d(Lx, Ly) = \pm d(x, y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ (знак минус возможен тогда и только тогда, когда $\rho = 0$ и $\| g_{ij} \|$ имеют сигнатуру 0).*

(20.2) В случае евклидова пространства эта теорема была доказана Бекманом и Кворлесом [51] в 1953 г. Случай псевдоевклидова пространства с $\rho = 0$ был впервые изучен в работе Ю. Ф. Борисова [18] в 1960 г. и, повторно, Лестером [66] через семнадцать лет. Лестер распространил результат Борисова на векторные пространства над произвольным алгебраическим полем $\mathbf{F}$ характеристики, не равной двум, и получил следующую теорему.

Теорема [66]. *Пусть X — векторное пространство над полем $\mathbf{F}$ с характеристикой, не равной двум, на котором определена неособенная симметричная билинейная форма (,). Предположим, что $\dim X \geqslant 3$ и найдется $x \neq 0$, для которого $(x, x) = 0$. Пусть f: $X \to X$ — биекция такая, что $f(C_x) = C_{f(x)}$, где*

$$C_x = \{y \in X\colon (y - x,\ y - x) = 0\},$$

для любого вектора $x \in X$. Тогда $f(x) = Lx + f(0)$, где пара (L, τ) есть полулинейная биекция, удовлетворяющая условиям:

1) $L(x + y) = Lx + Ly$;
2) $L(\alpha x) = \alpha^\tau Lx$, τ: $\mathbf{F} \to \mathbf{F}$ — *автоморфизм поля* $\mathbf{F}$;
3) $(Lx, Ly) = \lambda(x, y)^\tau$ *для некоторого ненулевого* $\lambda \in \mathbf{F}$ *и для всех* $x, y \in X$.

Замечание. Если $\mathbf{F} = \mathbb{R}$, то $\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (так как $\mathbb{R}$ не имеет нетривиальных автоморфизмов) и для некоторого $\mu \in \mathbb{R}$ либо $\lambda = \mu^2$, либо $\lambda = -\mu^2$. В первом случае $i = \mu^{-1}L$ удовлетворяет $(ix, iy) = (x, y)$, т. е. i — изометрия на X. Во втором случае $j = \mu^{-1}L$ удовлетворяет $(jx, jy) = -(x, y)$. Последнее означает, что билинейные формы (,) и $-$ (,) имеют одну и ту же сигнатуру. Следовательно, именно первый случай охватывает теорему 1 [2], [54] из § 11 для отношения (I).

ГЛАВА 3
СВЯЗНЫЕ ПРЕДПОРЯДКИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С классической точки зрения естественным является предположение, что воздействие от события x к событию y передается непрерывно, через континуум промежуточных событий. Энергия-импульс от события x должна передаться в первоначальный момент процесса воздействия мировым точкам, лежащим сколь угодно близко от точки x, и затем постепенно от точки к точке

[1] Здесь $e = (0, \ldots, 0)$.

достичь мировой точки y, знаменуя наступление события y. На математическом языке это означает, что точка a должна быть предельной для области воздействия P_a. Возможно и более сильное требование: если $b \in P_a$, то точки a и b соединяются непрерывным путем, лежащим в P_a, причем точки этого пути находятся в причинно-следственном отношении.

В этой главе мы изучим предпорядки в аффинном пространстве, формализующие в определенном смысле представление о непрерывной передаче воздействия. Такие предпорядки условно будем называть связными. Аксиоматики теории относительности, основывающиеся на связных порядках, мы изучали в главе 2, а также в § 5. Здесь же мы изучаем некоторые результаты, касающиеся отображений связно упорядоченного пространства A^n и структуры связных предпорядков.

§ 21. Отображения упорядоченных пространств [10]

(21.1) Рассматриваем аффинное пространство A^n, в котором задан предпорядок P, инвариантный относительно всех параллельных переносов. Используемые далее обозначения и понятия введены были в пунктах (1.4) — (1.7) и в § 2.

Под отображением f в этой главе мы будем понимать такое взаимно однозначное отображение A^n в аффинное пространство A^m, что каждое множество $f(P_x)$ может быть получено из $f(P)$ переносом. Полагая $P' = f(P)$, можно выразить это условие равенством $f(P_x) = P'_{x'}$. Тем самым в $f(A^n)$ индуцируется предпорядок P', который однозначно продолжается на все A^m в виде предпорядка, инвариантного относительно переносов (см. [10], лемма 1 из § 3).

(21.2) На предпорядок P налагаем следующие условия:

А) Существует окрестность точки e, в которой $\bar{P}$ и $\bar{P}^-$ не имеют общих точек, помимо e;

Б) $\bar{P}$ содержит конус с вершиной e, имеющий внутренние точки.

Тогда справедлива

Теорема [10]. *Пусть предпорядок P, заданный в A^n, удовлетворяет условиям* А) *и* Б). *Пусть отображение f: $A^n \to A^m$ $(n \geqslant 2)$ непрерывно. Тогда, если P не является квазицилиндром, то f аффинно.*

Если же P — квазицилиндр и представим k способами $Q(E_1, l_1), \ldots, Q(E_k, l_k)$, то

$$f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_k,$$

где f_0 — аффинное преобразование A^n в A^m, а d_i суть смещения $d_{E_i l_i}$ (допуская, что, возможно, l_i есть луч L_i), которые коммутируют.

Замечание. Требование непрерывности в этой теореме является лишним для широкого класса предпорядков. Например, если предпорядок P удовлетворяет аксиоме A_2 и является замкнутым или открытым (см. (1.7), (1.8)). Это следует из теоремы о непрерывности (§ 3).

§ 22. Связные предпорядки

(22.1) Если под связным предпорядком понимать такой предпорядок P, для которого множество P является только связным, то трудно ожидать сколь угодно удовлетворительного их описания. Они могут быть довольно различными, и соответствующие примеры легко построить. В аксиоматической теории относительности, однако, главную роль играют порядки, задаваемые выпуклыми конусами. Поэтому вполне естественно задаться целью определить условия, характеризующие предпорядок, задаваемый выпуклым конусом, на основе представления о связности предпорядка. Эта задача была поставлена А. Д. Александровым, и ее решение содержится в работах А. В. Левичева [36] — [38].

(22.2) Назовем предпорядок P сильно связным (соответственно квазисвязным), если при любых a, b таких, что $a \leqslant b$ (т. е. при $b \in P_a$), точки a, b принадлежат некоторому содержащемуся в $P_a \cap P_b^-$ (соответственно $\overline{P}_a \cap \overline{P}_b^-$) связному множеству M. Очевидно, сильно связный предпорядок всегда является квазисвязным. Легко проверяется, что предпорядок сильно связный тогда и только тогда, когда множества $P_a \cap P_b^-$ связны при всех a, b таких, что $a \leqslant b$.

Простейший пример квазисвязного порядка, не являющегося сильно связным,— это P-множество всех неотрицательных рациональных чисел действительной оси.

(22.3) Если P — выпуклый конус, то P задает в A^n сильно связный предпорядок. Очевидно также, что если $\overline{P}$ — выпуклый конус, а P задает предпорядок, то этот предпорядок — квазисвязный.

Т е о р е м а 1. *Если множество P задает квазисвязный предпорядок, то $\overline{P}$ есть выпуклый конус* [36], [37].

С л е д с т в и е 1. *Замкнутый квазисвязный (в частности, сильно связный) предпорядок задается выпуклым конусом.*

Т е о р е м а 2. *Если предпорядок — квазисвязный, $e \in \overline{\operatorname{int} P}$, то P содержит внутренность своей выпуклой оболочки.*

С л е д с т в и е 2. *Открытый квазисвязный (в частности, сильно связный) предпорядок задается конусом.*

(22.4) Прежде чем продемонстрировать интересные примеры предпорядков, дополняющие теоремы 1 и 2, введем еще одно понятие.

Предпорядок будем называть линейно связным, если при всех a, b таких, что $a \leqslant b$, точки a, b принадлежат некоторому, содержащемуся в $P_a \cap P_b^-$, линейно упорядоченному связному множеству M (т. е. при $x, y \in M$, или $x \leqslant y$, или $y \leqslant x$). Очевидно, что линейно связный предпорядок является всегда сильно связным.

Линейно связные порядки и предпорядки могут определяться не конусом. В самом деле [36], существует функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что при любых $x, y \in \mathbb{R}$ $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, график Γ_φ функции φ на плоскости $\mathbb{R}^2$ связен, а φ не является непрерывной.

Положим $P = \Gamma_\varphi$ и $Q = \{(x, \varphi(x))\colon x \geqslant 0\}$. Тогда P определяет линейно связный предпорядок в $\mathbb{R}^2$, причем $P \cap P_x^- = P$ для всех $x \in P$, а Q определяет линейно связный порядок в $\mathbb{R}^2$. Но ни P, ни Q, не есть конус.

При этом справедлива

Т е о р е м а 3 [38]. *Если предпорядок — линейно связный и существует такая окрестность U точки e, что семейство множеств $\{P \cap P_x^-\colon x \in P \cap U\}$ ограничено в совокупности, то P есть конус.*

Т е о р е м а 4 [38]. *Если для замкнутого предпорядка P выполнена аксиома A_2, то P есть конус.*

(22.5) Предпорядок, задаваемый множеством P, назовем локально компактно связным, если для любой точки $x \in P$ и любого $\varepsilon > 0$ множество $P \cap P_x^-$ содержит такой связный компакт $K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$, что все K_i — связные компакты, диаметры которых не превосходят ε, а $e, x \in K$.

Т е о р е м а 5 [38]. *Если P задает локально компактно связный предпорядок, то P есть выпуклый конус.*

Предпорядок P называется компактно связным, если для любого $x \in P$ множество $P \cap P_x^-$ содержит связный компакт, соединяющий точки e, x. Очевидно, локально компактно связный предпорядок является компактно связным.

Теорема 6 [38]. *Пусть P задает компактно связный предпорядок в A^n. Если выполняется одно из следующих трех условий:*

1) $\operatorname{conv} P = A^n$;
2) $\operatorname{conv} P$ *не содержит прямой*;
3) $\dim \operatorname{conv} P \leqslant 2$,

то P — выпуклый конус.

§ 23. Конусы с транзитивной группой

(23.1) Введенные в § 22 определения связных порядков (сильно связного, квазисвязного, линейно связного) можно использовать как аксиомы, характеризующие порядки, задаваемые конусом. Световой конус в теории относительности, как известно, является эллиптическим. Следовательно, возникает задача поиска условий, которые позволят нам выделить эллиптические конусы среди выпуклых конусов и даже, что было бы еще интереснее, среди всевозможных конусов в аффинном пространстве A^n. Такие дополнительные условия или гипотезы о структуре пространства-времени обнаруживаются без каких-либо затруднений и издавна постулировались в классической физике. Речь идет о предположениях об однородности мира в пространстве и во времени, а также об изотропности пространства. Математически это приводит к идее изучить, как устроены все однородные конусы, т. е. конусы, на которых действует транзитивно некоторая группа преобразований [6], [56], [95].

(23.2) Пусть C — конус в аффинном пространстве A^n ($n \geqslant 2$) в смысле § 18. Обозначим через G группу всех биективных отображений A^n на себя, сохраняющих семейство конусов $\{C_x: x \in A^n\}$, т. е. если $f \in G$, то $f(C_x) = C_{f(x)}$ для любой точки $x \in A^n$, и удовлетворяющих условию $f(e) = e$.

Аксиома Т. *Группа G действует транзитивно на C, т. е. для любых $x, y \in C \setminus \{e\}$ существует $f \in G$ такая, что $f(x) = y$.*

Теорема 1 [6]. *Если C есть $(n - 1)$-мерное замкнутое множество, содержащееся в полупространстве и отличное от плоскости, то при выполнении аксиомы* Т *конус C является эллиптическим, а G—группой Лоренца (с подобием).*

В случае выпуклого поверхностного конуса C эта теорема была доказана в 1967 г. Буземаном ([56], с. 34).

Теорема 2 [6]. *Пусть выполнена аксиома* Т *и C — такой конус с острой вершиной, что $A^n \setminus C$ — несвязное множество и одно из множеств $C \setminus \{e\}$, $A^n \setminus C$ имеет не более чем счетное число связных компонент. Тогда C — эллиптический конус, а G — группа Лоренца (с подобием).*

Теорема 3 [6]. *Пусть выполнена аксиома* Т *и конус C имеет острую вершину и содержит внутренние точки. Тогда* 1) *C — выпуклый конус и $C \setminus \{e\}$ — открытое множество*; 2) *конус C будет эллиптическим, а группа G — группой Лоренца (с подобием), если выполнено одно из следующих двух условий:*

а) *∂C — гладкая поверхность (кроме точки e)*;

б) *сечение ∂C плоскостью, пересекающей все образующие, содержит хотя бы одну такую точку, что это сечение имеет соприкасающийся параболоид (не вырождающийся в цилиндр).*

В предположении выпуклости конуса C теорема 3 доказана Буземаном ([56], с. 38).

ГЛАВА 4
ХРОНОГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ

В предыдущих главах под пространством-временем понималось связное односвязное локально компактное хаусдорфово пространство V с транзитивной коммутативной группой T гомеоморфизмов V на себя, сохраняющих области воздействия $\{P_a\}$. Таково, например, пространство Минковского —

пространство-время в специальной теории относительности. Однако в современной космологии весьма успешно используются и другие геометрические модели. Хорошо зарекомендовали себя пространственно-однородные и изотропные модели Фридмана; используются модели де Ситтера, Гёделя и другие. Поэтому вполне естественно попытаться построить некоторую общую аксиоматическую теорию пространства-времени на основе представления о причинном порядке. Такие теории были предложены Буземаном [56], Р. И. Пименовым [40], [41], Кронхеймером и Пенроузом [64]. Изложение этих теорий выходит за рамки настоящего обзора, и в этой главе мы приведем лишь результаты, касающиеся отображений, сохраняющих некоторые семейства «световых конусов» в пространствах, тесно связанных с моделями Гёделя, де Ситтера, а также в пространстве Лобачевского и в лоренцевых многообразиях.

§ 24. Пространства с некоммутативной группой

(24.1) В главах 1 и 2, для того чтобы прийти к геометрии Минковского, мы разносили двойной световой конус C в аффинном пространстве V с помощью группы параллельных переносов T.

Рассмотрим теперь вместо группы T следующую некоммутативную группу Ли:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 + \alpha,\\ \bar{x}_2 &= x_2 + \beta,\\ \bar{x}_3 &= x_3 e^{-\beta} + \gamma,\\ \bar{x}_4 &= x_4 + \delta,\end{aligned}$$

где α, β, γ, δ — вещественные числа. Относительно этой группы инвариантно семейство двойных поверхностных эллиптических конусов

$$C_a = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V\colon\ (x_1-a_1)^2-(x_2-a_2)^2-\frac{1}{2}e^{2a_2}(x_3-a_3)^2-$$

$$-(x_4-a_4)^2+2e^{a_2}(x_1-a_1)(x_3-a_3)=0\Big\},$$

$$a=(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Теорема 1 [28]. *Любое гомеоморфное отображение $f\colon V\to V$ такое, что $f(C_a) = C_{f(a)}$, является преобразованием вида*

$$(1)\qquad \begin{cases}\bar{x}_1 = (\pm)\, x_1 + \alpha,\\ \bar{x}_2 = x_2 + \beta,\\ \bar{x}_3 = (\pm)\, e^{-\beta} x_3 + \gamma,\\ \bar{x}_4 = \pm\, x_4 + \delta,\end{cases}$$

где символ $(\pm)$ означает, что выбор знака перед x_1 и перед x_3 согласованный — берется одинаковый знак, тогда как знак перед x_4 выбирается произвольно.

Нетрудно проверить, что преобразования (1) являются движениями пространства-времени Гёделя с метрикой

$$ds^2 = a^2\left(dx_1^2 - dx_2^2 - \frac{1}{2}e^{2x_2}dx_3^2 - dx_4^2 + 2e^{x_2}dx_1\,dx_3\right).$$

Теорему 1 можно рассматривать как некоторое обобщение теоремы А. Д. Александрова и В. В. Овчинниковой (см. теорему 1, § 11) [28].

(24.2) Рассмотрим теперь некоммутативную группу

$$(2)\qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = \lambda x_1, \\ \bar{x}_2 = \lambda x_2 + \alpha, \\ \bar{x}_3 = \lambda x_3 + \beta, \\ \bar{x}_4 = \lambda x_4 + \gamma, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$, α, β, γ — вещественные числа, действующую транзитивно на полупространстве $\{x_1 > 0\}$. Относительно группы (2) инвариантна система двойных эллиптических конусов

$$K_a = \{x \in \{x_1 > 0\} \colon (x_1 - a_1)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (x_\alpha - a_\alpha)^2 = 0\}, \quad a = (a_1, a_2, a_3, a_4), \quad a_1 > 0.$$

Теорема 2 [23], [28]. *Если $f\colon \{x_1 > 0\} \to \{x_1 > 0\}$ — гомеоморфное отображение такое, что $f(K_a) = K_{f(a)}$, то f имеет вид*

$$(3)\qquad f(x) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & U & \\ 0 & & & \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \qquad \lambda > 0,$$

где U — ортогональная матрица.

Преобразования (3) являются движениями в пространстве-времени де Ситтера с метрикой [28]

$$ds^2 = \frac{1}{x_1^2}(dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2) \qquad (x_1 > 0).$$

Аналогичные результаты можно получить для пространств Эйнштейна максимальной подвижности $\overset{*}{T}_{2,5}$ и $\overset{*}{T}_{3,4}$.

(24.3) Преобразования, полученные в теоремах 1 и 2, являются аффинными. Было бы интересно выяснить, является ли аффинным отображение, сохраняющее достаточно произвольное семейство конусов в пространстве A^n ($n \geqslant 2$). Пока не получено исчерпывающего ответа на этот вопрос, хотя имеется довольно общая теорема, принадлежащая А. В. Шайденко, к изложению которой мы и переходим.

Рассмотрим семейство ординарных конусов $\{K_x\colon x \in A^n\}$ в аффинном пространстве A^n. Через t_{xy} обозначим перенос, для которого $t_{xy}(x) = y$. Будем говорить, что конус K_x «меньше», «равен» или «больше» конуса K_y в зависимости от того, какое из следующих соотношений выполняется:

1. $t_{xy}(\bar{K}_x) \setminus \{y\} \subset \operatorname{int} \operatorname{conv} K_y$.
2. $t_{xy}(K_x) = K_y$.
3. $\bar{K}_y \setminus \{y\} \subset \operatorname{int} \operatorname{conv} t_{xy}(K_x)$.

Назовем конусы K_x и K_y сравнимыми, если для них выполняется какое-либо из этих соотношений.

Предположим, что все конусы K_x нашего семейства либо ординарные поверхностные строго выпуклые, либо они все удовлетворяют следующему условию: для каждой точки x существует такой ординарный телесный замкнутый строго выпуклый конус C_x с вершиной x, что $\operatorname{int} C_x \subset K_x \subset C_x$. Конусы, удовлетворяющие этому условию, будем называть ординарными произвольными телесными строго выпуклыми конусами. Будем также предполагать, что любые два конуса нашего семейства сравнимы. Ясно, что существует луч $l^+(e, x_0)$, что для любой точки x $l^+(e, x_0) \setminus \{e\} \subset \operatorname{int} \operatorname{conv} t_{xe}(K_x)$.

Будем говорить, что конусы $\{K_x\}$ непрерывно зависят от x, если для любой точки x и любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U точки x такая, что для каждой точки $y \in U$ и для любой двумерной плоскости $P \supset [l^+(e, x_0)]_x$ выполняется неравенство $| \measuredangle P \cap t_{yx}(K_y) - \measuredangle P \cap K_x | < \varepsilon$ (где через $\measuredangle P \cap K_z$ обозначается угол $P \cap K_z$). Легко видеть, что это определение эквивалентно следующему, более стандартному. Конусы K_x непрерывно зависят от x, если для каждой точки x и для каждой последовательности точек $\{x_m\}$, $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x$, имеем $\overline{K} = \operatorname*{lt}_{m\to\infty} K_{x_m}$ (где через $\operatorname*{lt}_{m\to\infty}$ обозначен топологический предел).

Теорема [47]. *Пусть $\{K_x\colon x \in A^n\}$ — семейство конусов в A^n $(n \geqslant 3)$ одного из двух типов: либо все K_x — ординарные поверхностные строго выпуклые, либо все K_x — ординарные произвольные телесные строго выпуклые конусы; причем оно удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\operatorname{conv} K_x$ *— задают порядок в* A^n;
2) *для любых x, y конусы K_x и K_y сравнимы;*
3) $\{K_x\}$ *непрерывно зависит от x.*

Пусть $f\colon A^n \to A^n$ — биективное отображение такое, что для каждой точки x $f(K_x)$ — конус того же типа, что и K_x, причем все конусы $f(K_x)$ удовлетворяют условию 2). Тогда f аффинно.

§ 25. Отображение конусов в пространстве Лобачевского

Пусть $Л^n$ $(n \geqslant 2)$ — n-мерное пространство Лобачевского. Рассмотрим семейство $L = \{l_x\colon x \in Л^n\}$ всевозможных прямых, параллельных прямой l в некотором определенном направлении. Пусть $\{C_x\}$ — семейство двойных круговых конусов (x — вершина конуса) в $Л^n$ с осями, принадлежащими семейству L, с одним и тем же углом раствора α $(0 < \alpha < \pi)$. Данное семейство конусов инвариантно относительно некоторой подгруппы изометрий, действующей транзитивно на $Л^n$ и изоморфной группе вида (2) из § 24, обобщенной на n-мерный случай, т. е. $(x_1, \ldots x_n) \to (\lambda x_1, \lambda x_2 + \alpha_1, \ldots, \lambda x_n + \alpha_{n-1})$ $(x_1, \lambda > 0)$ [22], [23].

Теорема 1 [23]. *Если $f\colon Л^n \to Л^n$ $(n \geqslant 2)$ — биективное отображение такое, что $f(C_x) = C_{f(x)}$, то f есть изометрия.*

§ 26. Хроногеометрия лоренцевых многообразий

(26.1) Теоремы об отображениях упорядоченного аффинного пространства имеют довольно естественное обобщение на лоренцевы многообразия. Но прежде, чем изложить имеющиеся в этом направлении результаты, приведем некоторые определения.

Под пространством-временем будем понимать связное четырехмерное гладкое многообразие M без края вместе с гладкой псевдоримановой метрикой g сигнатуры $(+---)$. Предполагаем также, что M временно ориентировано (т. е. M допускает неисчезающее нигде временное векторное поле) и на M фиксирована некоторая временная ориентация, определяющая будущее и прошлое.

Пусть A, $U \subset M$ и $U \supset A$ открыто. Через $I_+(A, U)$ обозначим множество точек $x \in U$ таких, что существуют направленная в будущее гладкая временная кривая $\gamma\colon I \to U$ (где $I \subset \mathbb{R}$ — связное множество) и точки $t_1, t_2 \in I$ такие, что $t_1 < t_2$, $\gamma(t_1) \in A$, $\gamma(t_2) = x$. $I_+(A, U)$ называется хронологическим будущим множества A относительно U.

Если $A = \{x\}$, то пишем $I_+(x, U)$ вместо $I_+(A, U)$ и $I_+(x)$ вместо $I_+(x, M)$.

Полагаем, по определению, $x \ll y(U)$ тогда и только тогда, когда $y \in I_+(x, U)$. Пишем $x \ll y$ вместо $x \ll y(M)$.

Аналогично определяется хронологическое прошлое $I_-(A, U)$ (заменяя направленные в будущее кривые на направленные в прошлое).

Пространство-время M разделимо по будущему (прошлому), если для любых $x, y \in M$ равенство $I_+(x) = I_+(y)$ влечет $x = y$ (соответственно $I_-(x) = I_-(y)$ влечет $x = y$).

Пусть $\langle M, g \rangle$ и $\langle M', g' \rangle$ — два пространства-времени и f: $M \to M'$ — биекция. Говорим, что f — конформное преобразование, если f и f^{-1} — гладкие отображения и существует гладкое нигде не обращающееся в нуль отображение Ω: $M' \to \mathbb{R}$ такое, что $f_* g = \Omega^2 g'$.

Биекция f: $M \to M'$ называется *причинной*, если для любых $x, y \in M$ и любых $u, v \in M'$ таких, что $x \ll y$ и $u \ll v$, справедливы отношения $f(x) \ll f(y)$ и $f^{-1}(u) \ll f^{-1}(v)$.

(26.2) Теорема 1 [69]. *Предположим, что $\langle M, g \rangle$ и $\langle M', g' \rangle$ — два разделимые по прошлому и будущему пространства-времени и f: $M \to M'$ — причинная биекция. Тогда f — конформное преобразование.*

Этот результат, принадлежащий Маламенту [69], обобщает теорему Зимана [80] (см. теорему 1 из § 11, пункт (11.3)). Как показано в [69], утверждение теоремы (26.2) перестает быть справедливым, если требовать только разделимости по прошлому или разделимости по будущему.

(26.3) Пусть M — пространство-время и $U \subset M$. Множество U называется выпуклым, если для любых точек $x, y \in U$ существует геодезическая γ: $[0, 1] \to U$ с $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, которая единственна (с точностью до перепараметризации).

Предположим, γ: $I \to M$ ($I \subset \mathbb{R}$ — связное множество) — непрерывная кривая. Говорим, что она направлена в будущее и является временной, если для любого $t_0 \in I$ и любых открытых выпуклых множеств U, содержащих $\gamma(t_0)$, существует открытый подынтервал $\tilde{I} \subset I$, содержащий t_0, такой, что

$$(*) \qquad \begin{cases} t \in \tilde{I} \ \text{ и } \ t < t_0 \ \text{ влечет } \ \gamma(t) \ll \gamma(t_0)\,(U), \\ t \in \tilde{I} \ \text{ и } \ t_0 < t \ \text{ влечет } \ \gamma(t_0) \ll \gamma(t)\,(U). \end{cases}$$

Наконец, γ есть направленная в будущее непрерывная световая геодезическая, если в данном выше определении условия (*) заменены на требование:

$$t_1, t_2 \in \tilde{I} \text{ и } t_1 < t_2 \text{ влечет } \gamma(t_2) \in J_+[\gamma(t_1), U] \setminus I_+(\gamma(t_1), U),$$

где $J_+[\gamma(t_1), U]$ — причинное будущее точки $\gamma(t_1)$ относительно U. Оно, по определению, состоит из $y \in U$, для которых существует гладкая кривая, лежащая в U и соединяющая $\gamma(t_1)$ с y с нигде не обращающимися в нуль направленными в будущее непространственными касательными векторами.

Теорема 2 (Хокинг — Маламент). *Предположим, $\langle M, g \rangle$ и $\langle M', g' \rangle$ — два пространства-времени и f: $M \to M'$ — гомеоморфизм такой, что f и f^{-1} сохраняют направленные в будущее непрерывные световые геодезические. Тогда f — конформное преобразование* [62], [69].

В случае пространства Минковского эта теорема была впервые доказана Борхерсом и Хегерфельдтом [55].

Теорема 3 [69]. *Пусть $\langle M, g \rangle$ и $\langle M', g' \rangle$ — два пространства-времени и f: $M \to M'$ — биекция такая, что f и f^{-1} сохраняют направленные в будущее непрерывные временные кривые. Тогда f — конформное преобразование.*

§ 27. Аналог теоремы Александрова в классе частично упорядоченных полей

(27.1) Пусть $\mathbf{K}$ — коммутативное поле, $X = \mathbf{K}^n$ ($n \geqslant 3$) и Q — неопределенная квадратичная форма на X с индексом Витти, равным 1. Последнее означает, что X разлагается в ортогональную прямую сумму $U \perp H$, где U — подпространство, не содержащее ненулевых световых векторов (т. е.

таких $x \neq 0$, что $Q(x, x) = 0$), а H — подпространство, натянутое на два неортогональных световых вектора [68].

Полагаем

$$C_a = \{x \in X:\ Q(x-a, x-a) = 0\}.$$

Теорема 1 [81]. *Если f: $X \to X$ — биекция такая, что $f(C_a) = C_{f(a)}$, то f есть композиция переноса и полуподобия g, т. е. $Q(g(x), g(x)) = c \cdot \mu Q(x, x)$, для некоторого $c \neq 0$, где μ — автоморфизм поля* **K**. *Если характеристика поля* **K** *отлична от двух, то можно опустить требование, что вершины конусов переходят в вершины.*

Замечание. Условие $\mathrm{char}(\mathbf{K}) \neq 2$ обязательно, как показывает соответствующий контрпример, приведенный в [81].

(27.2) Пусть теперь **K** — коммутативное поле, снабженное нетривиальным частичным порядком $\leqslant$. Положим $P = \{x \in \mathbf{K}:\ x \geqslant 0\}$. На $X = \mathbf{K}^n$ ($n \geqslant 3$) определим форму

$$Q(x, x) = x_n^2 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2, \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Введем отношения $\preccurlyeq$ и $\prec$ на X:

1) $y \preccurlyeq x$ тогда и только тогда, когда $Q(x-y, x-y) \geqslant 0$ и $x_n \geqslant y_n$, и

2) $y \prec x$ тогда и только тогда, когда $Q(x-y, x-y) > 0$ и $x_n > y_n$.

Заметим, что $x \preccurlyeq y$ не означает $x \prec y$ или $x = y$. Пусть

$$P_a^1 = \{x \in X:\ a \preccurlyeq x\},$$
$$P_a^2 = \{x \in X:\ a \prec x\},$$
$$P_a^3 = P_a^1 \setminus P_a^2.$$

Теорема 2 [81]. *Предположим, что пара* $\langle \mathbf{K}, \leqslant \rangle$ *удовлетворяет условиям:*

а) $P + P \subset P$;

б) $P \cdot P \subset P$;

в) $P \cap (-P) = \{0\}$;

г) $\mathbf{K}^2 \subset P$.

Тогда отношение $\preccurlyeq$ есть частичный порядок на X и любая биекция f: $X \to X$, сохраняющая конусы одного из следующих типов: P_a^1, P_a^2, P_a^3, $P_a^1 \cup (-P_a^1)$, $P_a^2 \cup (-P_a^2)$, $P_a^3 \cup (-P_a^3)$ (вершина $\neq 0$ включается), есть композиция переноса и полулинейного отображения.

§ 28. Задачи

В заключение приведем несколько задач, решение которых способствовало бы дальнейшему прогрессу аксиоматической теории относительности.

1. (А. Д. Александров, [100].) Построить аксиоматику специальной теории относительности, исходя из следующих основных положений:

а) пространство-время есть многообразие всех событий, взятое лишь с точки зрения его структуры, определенной системой отношений предшествования (областей воздействия $\{P_a\}$ — см. § 1), в отвлечении от всех иных свойств;

б) пространство-время есть четырехмерное многообразие;

в) пространство-время максимально однородно, т. е. группа его преобразований, сохраняющих отношение предшествования, максимальная из всех возможных.

Нетрудно видеть, что аксиоматики, изложенные в главах 1 и 2, не отражают в полной мере положения в), так как главным образом предполагается однородность пространства-времени, а не максимальность группы изотонных преобразований. Последнее, видимо, может дать многое. Например, среди псевдоримановых 4-мерных многообразий требование максимальности группы движений сразу выделяет пространства постоянной кривизны, среди которых пространство Минковского обладает максимальной коммутативной подгруппой.

2. (А. Д. Александров.) Можно ли, исходя из положений а) — в), сформулированных в задаче 1, получить конформное пространство C (см. § 12)?

Напомним, что пространство C является плоским псевдоримановым многообразием с топологией эквивалентной топологии пространства $S^3 \times S^1$. Рассматриваемая группа преобразований — это 15-параметрическая группа конформных преобразований.

3. Обозначим через A_5' следующее утверждение: P не является лучом. Можно ли из системы аксиом $\langle A_1, A_2, A_3, A_4, A_5' \rangle$ вывести утверждение аксиомы A_5, т. е. $\operatorname{int} P \neq \varnothing$ (см. [12])?

4. Справедливо ли утверждение теоремы 1 из § 7 без условия G_2?

5. Можно ли доказать теоремы, аналогичные теоремам 2, 3 из § 14 и теореме 4 из § 16 для открытой Вселенной Фридмана, заполненной пылевидной материей? При этом следует конусы C_x^+, C_x заменить на множества $J_+(x)\setminus I_+(x)$, $[J_+(x)\setminus I_+(x)] \cup [J_-(x)\setminus I_-(x)]$ соответственно и воспользоваться тем, что в некоторых координатах указанная космологическая модель описывается метрикой

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a_0}{2\sqrt{\tau^2 - r^2}}\right)^4 \{d\tau^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\}.$$

Соответствующее отображение, видимо, будет конформным (см. § 26).

6. Найти доказательство теорем 1, 2 из § 18, не предполагая, что отображение f, сохраняющее конусы, непрерывно.

7. (А. Д. Александров.) Аксиоматизировать специальную теорию относительности, исходя из положений а), б) из задачи 1 и следующего положения: группа G всех биекций, сохраняющих области воздействия $\{P_a\}$, действует транзитивно на множествах $V\setminus(P_a \cup P_a^-)$. Сформулированное только что положение отражает не столько представление об однородности и изотропности пространства-времени, сколько постулирует равноправность событий, не связанных отношением предшествования.

При решении данной задачи следует иметь в виду теорему А. Д. Александрова о конусах, на дополнении которых действует транзитивно группа биекций, сохраняющих рассматриваемые конусы [6].

8. Какие псевдоримановы пространства обладают тем свойством, что группа движений в подходящих локальных координатах может быть аффинизирована, т. е. преобразования группы записываются в виде

$$\bar{x}^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i x^k + a^i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где

$$a_k^i,\ a^i = \text{const}?$$

9. Какие группы Ли допускают левоинвариантный порядок? (См. [24] [1]), [26], [96].) В каком случае изотонная биекция будет автоморфизмом?

10. Всегда ли биекция, сохраняющая семейство конусов $\{K_x\colon x \in A^n\}$, будет аффинным преобразованием? Насколько произвольным может быть

[1]) В [24] ошибочно утверждается изометричность изотонных отображений. В действительности они являются квазиаффинными, т. е. каждую квазипрямую отображают на квазипрямую.

семейство конусов? В настоящее время наиболее общим результатом, полученным в этом направлении, является теорема А. В. Шайденко ([47], см. (24.3)).

11. В § 3 была доказана теорема, описывающая топологию пространства-времени V в терминах областей воздействия $\{P_a\}$ (см. (3.2)). Однако при этом предполагается, что множество $P \setminus \{e\}$ является открытым. В случае замкнутого P с внутренними точками, по-видимому, можно лишь утверждать, что группа гомеоморфизмов, соответствующая более сильной топологии с базой, задаваемой «интервалами» $P_a \cap P_b^-$, где $b \in P_a$ (александровская топология), совпадает с неоднородной группой Лоренца, включая подобие (см. [62], [91]). Остается невыясненным: можно ли все-таки описать топологию пространства-времени V в терминах областей воздействия для достаточно произвольного множества P?

12. Нельзя ли заменить положение о четырехмерности пространства-времени каким-либо постулатом, характеризующим отношение воздействия событий пространства-времени?

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров. О преобразованиях Лоренца.— УМН, 1950, 5:3, с. 187.

[2] А. Д. Александров, В. В. Овчинникова. Замечания к основам теории относительности.— Вестн. ЛГУ, 1953, вып. 11, с. 95—110.

[3] А. Д. Александров. Пространство и время в современной физике в свете философских идей Ленина.— М.: АН СССР, Ин-т философии, 1970.

[4] A. D. Alexandrov. The space-time of the theory of relativity. Jubilee of Relativity Theory.— Basel: Proceedings, 1956.

[5] A. D. Alexandrov. Contribution to chronogeometry.— Canad. J. Math., 1967, 19:6, p. 1119—1128.

[6] А. Д. Александров. Конусы с транзитивной группой.— ДАН, 1969, 189:4, с. 695—698.

[7] А. Д. Александров. Отображения семейств множеств.— ДАН, 1970, 190:3, с. 502—505.

[8] А. Д. Александров. Отображения семейств множеств.— ДАН, 1970, 191:3, с. 503—506.

[9] А. Д. Александров. Отображения семейств конусов.— ДАН, 1971, 197:5, с. 991—994.

[10] А. Д. Александров. Отображения упорядоченных пространств. 1.— Труды МИАН, 1972, 128, с. 3—21.

[11] А. Д. Александров. Отображение аффинных пространств с системами конусов.— Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1972, 27, с. 7—16.

[12] А. Д. Александров. К основаниям геометрии пространства-времени.— ДАН, 1974, 219:1, с. 11—14.

[13] А. Д. Александров. К основаниям геометрии пространства-времени.— ДАН, 1974, 219:2, с. 265—267.

[14] A. D. Alexandrov. Mappings of spaces with families of cones and space-time transformations.— Annali di Mathematica, pure ed applicata, ser. IV, 1975, 53, p. 229—257.

[15] А. Д. Александров. К основам теории относительности.— Вестн. ЛГУ, 1976, № 19, с. 5—28.

[16] А. Д. Александров. Отображения областей псевдоевклидовых пространств.— ДАН, 1977, 233:2, с. 265—268.

[17] А. Д. Александров, А. П. Копылов, А. В. Кузьминых, А. В. Шайденко. Об отображениях семейств конусов.— СМЖ, 1976, 17:4, с. 932—935.

[18] Ю. Ф. Борисов. О преобразованиях псевдоевклидова пространства.— Изв. вузов, Математика, 1960, № 6, с. 31—39

[19] Ю. Ф. Борисов. Об аксиоматическом определении групп Галилея и Лоренца.— СМЖ, 1978, 19:6, с. 1237—1253.
[20] Л. Г. Гуров. Об устойчивости преобразований Лоренца.— ДАН, 1973, 213:2, с. 267.
[21] Л. Г. Гуров. Об устойчивости преобразований Лоренца. Оценки для производных.— ДАН, 1975, 220:2, с. 273—276.
[22] А. К. Гуц. Об отображениях семейств множеств.— ДАН, 1973, 209:4, с. 773—774.
[23] А. К. Гуц. Об отображениях, сохраняющих конусы в пространстве Лобачевского.— Матем. заметки, 1973, 13:5, с. 687—694.
[24] А. К. Гуц. Отображения упорядоченного пространства Лобачевского.— ДАН, 1974, 215:1, с. 35—37.
[25] А. К. Гуц. Об отображениях, сохраняющих семейства множеств в гильбертовом пространстве.— Изв. вузов, Математика, 1975, № 9, с. 23—29.
[26] А. К. Гуц. Инвариантные порядки на трехмерных группах Ли.— СМЖ, 1976, 17:5, с. 986—992.
[27] А. К. Гуц. Изотонные отображения несвязно упорядоченного евклидова пространства.— СМЖ, 1980, 21:3, с. 80—88.
[28] А. К. Гуц. Хроногеометрия многообразий Геделя и де Ситтера.— СМЖ, 1980, 21:4, с. 38—44.
[29] А. К. Гуц. К основаниям геометрии пространства-времени.— ДАН, 1980, 253:2, с. 268—271.
[30] В. К. Конин. Характеристические свойства преобразований Лоренца.— СМЖ, 1977, 18:5, с. 1027—1031.
[31] В. К. Ионин. Аксиомы пространства-времени.— ДАН, 1978, 240:3, с. 522—525.
[32] Р. Йост. Общая теория квантованных полей.— М.: Мир, 1967.
[33] А. В. Кузьминых. Характеризация преобразований Лоренца.— ДАН, 1975, 225:6, с. 1260—1263.
[34] А. В. Кузьминых. Об одном минимальном условии, определяющем преобразование Лоренца.— СМЖ, 1976, 17:6, с. 1321—1326.
[35] А. В. Кузьминых. Об отображениях, сохраняющих выпуклость.— СМЖ, 1976, 17:6, с. 1408—1411.
[36] А. В. Левичев. О связном предпорядке.— ДАН, 1977, 235:6, с. 1256—1259.
[37] А. В. Левичев. Связность пересечений и выпуклая оболочка.— Деп. ВИНИТИ, № 237—278.
[38] А. В. Левичев. Связность пересечений и выпуклая оболочка.— Канд. дисс. Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1979.
[39] Дж. Нейман. Математические основы квантовой механики.— М.: Наука, 1964.
[40] Р. И. Пименов. Пространства кинематического типа.— Зап. научн. семин., ЛОМИ, 1968, 6, с. 3—496.
[41] Р. И. Пименов. К основаниям теории дифференцируемого пространства-времени.— ДАН, 1975, 222:1, с. 36—38.
[42] Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы.— М.: Наука, 1973.
[43] Проблемы Гильберта.— М.: Наука, 1969.
[44] Б. Риман. О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии.— В сб.: Об основаниях геометрии.— М., 1956.
[45] Б. А. Розенфельд. Неевклидовы пространства.— М.: Наука, 1969.
[46] В. П. Федотов. Некоторые замечания о дискретной хроногеометрии.— СМЖ, 1978, 19:1, с. 186—192.
[47] А. В. Шайденко. К вопросу об отображениях семейств конусов.— СМЖ, 1978, 20:1, с. 164—174.
[48] J. Alonso, F. Yudurain. On the continuity of causal automorphisms of space-time.— Commun. Math. phys., 1967, 4:5, p. 349—351.
[49] The Axiomatic Method.— Amsterdam: North-Holland, 1959.
[50] G. Barucchi, G. Teppati. The causality group.— Nuovo cimento, 1967, 52A:1, 50—61.

[51] F. S. B e c k m a n, D. A. Q u a r l e s. On isometries of Euclidean space.— Proceedings of AMS, 1953, 4, p. 810—815.
[52] W. B e n z. Zur charakterisierung der Lorentz-transformationen.— J. Geometry, 1977, 9:1—2, S. 29—37.
[53] G. B e r g e r. Temporally symmetric causal relations in Minkowski space-time.— Synthese, 1972, 24, p. 58—73.
[54] H. J. B o r c h e r s, G. C. H e g e r f e l d t. Über ein Problem der Relativitätstheorie: Wann sind Punktabbildungen des R^n linear? — Nachr. der Akad. der Wissenschaften in Göttingen. II. Math.-phys. Klasse, Jahrgang, № 10, 1972.
[55] H. J. B o r c h e r s, G. C. H e g e r f e l d t. The structure of space-time transformations.— Commun. math. phys., 1972, 28:3, p. 259—266.
[56] H. B u s e m a n n. Time-like spaces.— Dissertationes mathematicae, 1967, № 53, p. 5—50.
[57] A. J. B r i g i n s h a w. The axiomatic geometry of space-time: an assessment of the work of A. A. Robb.— Centaurus, 1978/79, 22:4, p. 315—323.
[58] D. G. B. E d e l e n. The structure of field space.—Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1962.
[59] R. E l l i s. Locally compact transformation groups.— Duke Math. J., 1957, 24, p. 119—125.
[60] W. G a r e t h. The relation «closer than» in Minkowski space.— Amer. J. Phys., 1973, 41:7, p. 871—873.
[61] C. G h e o r g h e, E. M i h u l. Causal groups of space-time.— Commun. math. phys. 1969, 14:2, p. 165—170.
[62] S. W. H a w k i n g, A. R. K i n g, P. J. M c C a r t h y. A new topology for curved space-time which incorporates the causal, differential, and conformal structures.— J. Math. phys., 1976, 17:2, p. 174—181.
[63] D. H i l b e r t. Die Grundlagen der Physik.— Math. Annalen, 1924, 92:1, 2, S. 1—32.
[64] E. H. K r o n h e i m e r, R. P e n r o s e. On the structure of causal spaces.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1967, 63:p. 481—501.
[65] A. L e n a r d. A characterization of Lorentz transformations.— J. Math. Phys., 1978, 19:1, p. 157.
[66] J. A. L e s t e r. Cone preserving mappings for quadratic cones over arbitrara fields.— Canad. J. Math., 1977, 29:6, p. 1247—1253.
[67] J. A. L e s t e r, M. A. M c K i e r n a n. On null preserving mappings.— Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1977, 81:3, p. 455—462.
[68] J. A. L e s t e r. Transformations of n-space which preserve a fixed square-distance.— Canad. J. Math., 1979, 31:2, p. 392—395.
[69] D. B. M a l a m e n t. The class of continuous timelike curves determines the topology of space-time.— J. Math. Phys., 1977, 18:7, p. 1399—1404.
[70] S. N a n d a. A geometrical proof that causality implies the Lorentz group.— Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1976, 79:3, p. 533.
[71] J. R ä t z. Zur Defenition der Lorentz transformationen.— Math.-phys. Semesterber, 1970, 17:2, S. 163—167.
[72] H. R e i c h e n b a c h. Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit Lehre.— Braunschweig: Fr. Wieweg und Sohn, 1924.
[73] H. R e i c h e n b a c h. Axiomatization of the theory of relativity.— Berkeley: University of California Press, 1969.
[74] O. S. R o t h a u s. Order isomorphisms of cones.— Proc. Amer. Math. Soc., 1966, 17:6, p. 1284.
[75] A. A. R o b b. A theory of time and space.— London, 1914.
[76] W. S e i e r. Kollineationen von Translationsstrukturen.— J. Geometry, 1971, 1, S. 183—195.
[77] E. M. S c h r ö d e r. Zur Kennzeichnung der Lorentz-Transformationen.— Aequationen Mathematicae, 1979, 19:2/3, p. 134—144.

[78] I. Segal. Covariant chronogeometry and extreme distances.— J. Astron. and Astrophys., 1972, **18**, p. 143—148.
[79] G. Teppati. An algebraic analogue of Zeeman's theorem.— Nuovo cimento, 1968, **54A**:3, p. 800—804.
[80] E. C. Zeeman. Causality implies the Lorentz group.— J. Math. phys., 1964, **5**:4, p. 490—493.
[81] P. G. Vroegindewey, V. Ja. Kreinovic, O. M. Kosheleva. An extension of a theorem of A. D. Alexandrov to a class of partially ordered fields.— Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., 1979, **41**:3, p. 363—376.
[82] C. Catteneo. Sui postulati comuni della cinematica classica e della cinematica relativistica.— Atti Acc. Naz. Lincei Rendiconti, 1958, **24**:5, p. 526—532.
[83] M. Flato, D. Sternheimer. Remarques sur les automorphismes causals de l'espaces-temps.— Comptes Rendues Acad. Sci., 1966, **263**:25, p. 935—938.
[84] W. Noll. Euclidean geometry and Minkowskian chronometry.— The Amer. math. monthly, 1964, **71**:2, p. 129—143.
[85] H. M. Schwartz. Axiomatic deduction of the general Lorentz transformations.— Amer. J. Phys., 1962, **30**:10, p. 697—707.
[86] H. Wolff. Minkowskische und absolute Geometrie. II.— Math. Ann., 1967, **171**:3, S. 165—193.
[87] A. A. Robb. Geometry of time and space.— Cambridge, 1936.
[88] A. A. Robb. The absolute relation of time and space.— London, 1930.
[89] Ph. Frank, H. Rothe. Über die Transformation der Raumz eitkoordinaten von ruhenden auf bewegte System.— Ann. Phys., 1911, **34**, S. 825.
[90] M. A. McKiernan. A functional equation in the characterization of null cone preserving maps.— Topics in diff. geom. (in memory of Evan Tom Davies), New York: Academic Press, 1976, p. 99—109.
[91] S. Nanda, H. K. Panda. Compact topologies on Minkowski space.— Internat. J. Theoret. Phys., 1974, **10**, p. 159—163.
[92] W. Benz. Kennzeichnungen von Lorentz-transformationen.— Beiträge zur geometrischen Algebra. Proc. Symp. Duisburg, 1976.
[93] W. Benz. A characterization of plane Lorentz transformations.— J. Geometry, 1977, **10**:1—2, p. 45—56.
[94] V. Berzi. On a condition characterizing the Lorentz and Galilei groups.— Repts. Math. Phys., 1977, **11**:3, p. 297—310.
[95] Э. Б. Винберг. Теория однородных выпуклых конусов.— Труды ММО, 1963, **12**, с. 303—358.
[96] Э. Б. Винберг. Инвариантные выпуклые конусы и упорядочения в группах Ли.— Функц. анализ, 1980, **14**:1, с. 1—13.
[97] В. Л. Гуревич. Кинематики ограниченной кривизны.— СМЖ, 1979, **20**:1, с. 37—48.
[98] В. Л. Гуревич. Двумерные многообразия ограниченной кривизны.— ДАН, 1979, **247**:1, с. 22—25.
[99] В. Л. Гуревич. Двумерные псевдоримановы многообразия ограниченной кривизны.— Кандидат. дисс., Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1979.
[100] А. Д. Александров. Философское содержание и значение теории относительности.— Вопр. философии, 1959, № 1, с. 67—84.

Омский государственный
университет

Поступила в редакцию
2 марта 1981 г.