Математические структуры и моделирование
2009, вып. 20, с. 12–26

УДК 513.813

ФОРМУЛЫ ТИПА ГАУССА-БОННЕ-ЧЕРНА ДЛЯ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ И РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ И ФОРМУЛА ХИРЦЕБРУХА

А.К. Гуц

Дается обзор формул типа Гаусса-Бонне-Черна для римановых и псевдоримановых многообразий.

Классическая формула Гаусса-Бонне

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_F K d\sigma = \chi(F) \tag{1}$$

связывает гауссову кривизну K замкнутой ориентированной двумерной поверхности F с характеристикой Эйлера-Пуанкаре поверхности F. Внутренняя геометрия, искривленность поверхности, увязаны в этой формуле с топологией поверхности, т.е. с ее формой.

Для односвязной области F с краем ∂F, состоящим из конечного числа гладких кривых с углами α_j в вершинах, формула Гаусса-Бонне имеет вид

$$\int\limits_F K d\sigma + \int\limits_{\partial F} k_g ds = 2\pi + \sum_j (\pi - \alpha_j), \tag{2}$$

где k_g – геодезическая кривизна.

Гаусс [1] доказал её для геодезических треугольников, а Бонне [2] в более общем виде (2). В виде (1) формула Гаусса-Бонне была установлена фон Диком [3] в 1888 году [4].

Обобщённую формулу Гаусса-Бонне на случай римановых многообразий впервые установили Аллендорфер и А.Вейль [5] в 1943 году. Под влиянием Вейля [4] новое простое доказательство формулы дал в 1944 году Черн [6].

Для замкнутых псевдоримановых многообразий формулу независимо вывели Черн (1963, [7]) и Авец (1962, [9]).

К сожалению, несмотря на важность этой формулы для теории римановых многообразий, эта её форма плохо представлена в русско-язычной учебной литературе. А если и представлена, то в форме равенства когомологических классов, что является препятствием для её использования со стороны многочисленной группы читателей, не владеющих методами алгебраической топологии.

Copyright © 2009 **А.К. Гуц.**

Омский государственный университет.
E-mail: `aguts@mail.ru`

1. Псевдоримановы многообразия

1.1. Формула Гаусса-Бонне-Черна для замкнутых псевдоримановых многообразий M^{2k}

Пусть $< M^{2k}, g >$ – $2k$-мерное компактное ориентированное псевдориманово многообразие сигнатуры $< \underbrace{+...+}_{p}\underbrace{-...-}_{2k-p} >$ без края.

Пусть $dv = \sqrt{|det(g)|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^{2k}$ – $2k$-форма объёма и

$$\Delta(R) = \frac{(-1)^{[p/2]}}{2^{2k}\pi^k k!}\eta^{i_1i_2...i_{2k}}_{j_1j_2...j_{2k}} Ri_1i_2j_1j_2Ri_3i_4j_3j_4...Ri_{2k-1}i_{2k}j_{2k-1}j_{2k},$$

где

$$\eta^{i_1i_2...i_{2k}}_{j_1j_2...j_{2k}} = \begin{cases} +1, \{i_1i_2...i_{2k}\} & \text{четная перестановка } \{j_1j_2...j_{2k}\}, \\ -1, \{i_1i_2...i_{2k}\} & \text{нечетная перестановка } \{j_1j_2...j_{2k}\}, \\ \ \ 0, \ \text{среди } \{i_1i_2...i_{2k}\} & \text{или среди } \{j_1j_2...j_{2k}\} \text{ есть одинаковые.} \end{cases}$$

Тогда [7, 9]

$$\boxed{\int\limits_{M^{2k}} \Delta(R)dv = \chi(M^{2k}),} \tag{1.1}$$

где $\chi(M^{2k})$ – характеристика Эйлера-Пуанкаре многообразия M^{2k}.

1.2. Формула Гаусса-Бонне-Черна для замкнутых псевдоримановых многообразий M^4

Пусть $< M^4, g >$ – 4-мерное замкнутое ориентированное псевдориманово многообразие сигнатуры $< \underbrace{+...+}_{p}\underbrace{-...-}_{4-p} >$.

Тогда [10]

$$\boxed{\int\limits_{M^4} W_{iklm}W^{iklm}dv = 2\int\limits_{M^4}\left(R^i_jR^j_i - \frac{1}{3}R^2\right)dv + (-1)^{p+[\frac{p}{2}]}8\pi^2\chi(M^4),} \tag{1.2}$$

где W – тензор Вейля.

1.3. Формула Черна-Гаусса-Бонне для псевдоримановых многообразий M^{2k} с краем

Пусть M^{2k} – псевдориманово многообразие с краем ∂M^{2k} и $q : T_1M^{2k} \to M^{2k}$ – расслоение на сферы, ассоциированное с касательным расслоением TM^{2k} (т.е.

состоящее из векторов касательного расслоения с нормой 1). Существует $(2k-1)$-форма σ на T_1M^{2k}, для которой

$$\int\limits_{q^{-1}(x)} \sigma = 1 \quad \text{для всех } x \in M^{2k}$$

и $q^*Pf_k(\Omega) = d\sigma$.

Всякое векторное поле T, нормальное к ∂M^{2k}, задает несингулярное сечение $\tau : \partial M^{2k} \to T_1M^{2k}$.

Тогда имеет место формула Черна-Гаусса-Бонне для псевдоримановых многообразий M^{2k} с краем [11]:

$$\boxed{\int\limits_{M^{2k}} Pf(\Omega) = ind_{\partial M^{2k}}T + \int\limits_{\partial M^{2k}} \tau^*\sigma,} \tag{1.3}$$

где $ind_{\partial M^{2k}}$ определяется следующим образом.

Если T не нулевое векторное поле на ∂M^{2k}, $\overline{T}$ – продолжение векторного поля T на все многообразие M^{2k} и $a_1, ..., a_k$ – конечное число особых точек (нулей) поля $\overline{T}$ на M^{2k} [12, с. 516], то

$$ind_{\partial M^{2k}}T = \sum_{j=1}^{k} ind_{a_j}\overline{T}.$$

Если поле T трансверсально (в частности, нормально) к ∂M^{2k}, то

$$ind_{\partial M^{2k}}T = \chi(M^{2k}).$$

В общем случае для ориентированного компактного многообразия с краем:

$$ind_{\partial M^{2k}}T = \chi(M^{2k}) - deg(K_T),$$

где $deg(K_T)$ – степень отображения $K_T : \partial M^{2k} \to S^{2k-1}$ [12, с. 502], $K_T(x)$ равно точке на S^{2k-1}, отмеченной концом вектора $v = v^0T + v^1u_1 + ... + v^{2k-1}u_{2k-1}$, $\{u_1, ..., u_{2k-1}\}$ – базис в $T_x(\partial M^{2k})$, $x \in \partial M^{2k}$, $\sum_j v^j = 1$ [13].

Если Q^{2k} – $2k$-мерная компактная область в M^{2k} с границей ∂Q^{2k}, то формулу (1.3) можно переписать в виде

$$\boxed{\int\limits_{Q^{2k}} Pf(\Omega) = ind_{\partial Q^{2k}}T + \int\limits_{\partial Q^{2k}} \tau^*\sigma,} \tag{1.4}$$

где все формы, поля, определяются как выше с заменой буквы M на букву Q.

1.4. Формула для чисел Понтрягина для замкнутых псевдоримановых многообразий M^{4k}

Пусть $< M^{4k}, g >$ – $4k$-мерное замкнутое ориентированное псевдориманово многообразие сигнатуры $< \underbrace{+...+}_{p}\underbrace{-...-}_{4k-p} >$.

Пусть
$$dv = \sqrt{|det(g_{ij})|}dx^1 \wedge ... \wedge d^{4k}$$
– форма объёма и
$$\Delta_{4k} = \frac{(-1)^p}{(2\pi)^{2k}(2k)!}\Omega^{i_1}_{i_2} \wedge \Omega^{i_2}_{i_3} \wedge ... \wedge \Omega^{i_{2k}}_{i_1}$$
или
$$\Delta_{4k} = \frac{(-1)^p}{(2\pi)^{2k}(2k)!2^{2k}} R^{\alpha}_{\beta,\lambda_1\lambda_2} R^{\beta}_{\gamma,\lambda_3\lambda_4} ... R^{\delta}_{\alpha,\lambda_{4k-1}\lambda_{4k}} \eta^{\lambda_1...\lambda_{4}k}.$$
Тогда имеет место формула Занда [14] для k-мерного числа Понтрягина
$$\boxed{p_k[M^{4k}] = \int\limits_{M^{4k}} \Delta_{4k}\ dv.} \tag{1.5}$$

Напомним, что k-мерное число Понтрягина $p_k[M^{4k}]$ определяется как значение характеристического класса Понтрягина $p_k(\xi) \in H^{4k}(M^{4k}, \mathbb{R})$, где ξ – касательное расслоение на M^{4k} на фундаментальном классе $\mu_M \in H_{4k}(M^{4k}, \mathbb{R})$, т.е.
$$p_k[M^{4k}] = \langle p_k(\xi), \mu_M \rangle$$
или
$$p_k[M^{4k}] = \int\limits_{M^{4k}} p_k(\xi)$$
в случае, когда когомологический класс $p_k(\xi)$ реализуется как внешняя дифференциальная $4k$-форма, т.е. имеются в виду когомологии де Рама.

2. Римановы многообразия

Многообразие $< M^n, g >$ – риманово, если оно снабжено положительно определенной метрикой g.

2.1. Формула Гаусса-Бонне-Черна для замкнутых римановых многообразий M^{2k}

Пусть $< M^{2k}, g >$ – $2k$-мерное компактное ориентированное риманово многообразие без края и
$$\Omega = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\pi^k k!}\eta^{i_1 i_2 ... i_{2k}}_{12...(2k)} \Omega i_1 i_2 \wedge ... \wedge \Omega i_{2k-1} i_{2k}.$$

Имеем

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} dx^k \wedge dx^l$$

и

$$\Omega = E_{2k} dv,$$

где $dv = \sqrt{g} dx^1 \wedge ... \wedge dx^{2k}$ – форма объёма и (см. [16, p. 105]):

$$E_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(2\pi)^k k!} \eta^{i_1 i_2 ... i_{2k}}_{j_1 j_2 ... j_{2k}} Ri_1 i_2 j_1 j_2 ... Ri_{2k-1} i_{2k} j_{2k-1} j_{2k}.$$

Здесь (см. [20, с. 56])

$$\eta^{i_1 i_2 ... i_{2k}}_{j_1 j_2 ... j_{2k}} = \begin{cases} +1, & \{i_1 i_2 ... i_{2k}\} \text{ различны и дают четную перестановку } \{j_1 j_2 ... j_{2k}\}, \\ -1, & \{i_1 i_2 ... i_{2k}\} \text{ различны и дают нечетную перестановку } \{j_1 j_2 ... j_{2k}\}, \\ 0, & \text{среди } \{i_1 i_2 ... i_{2k}\} \text{ или среди } \{j_1 j_2 ... j_{2k}\} \text{ есть одинаковые.} \end{cases}$$

Тогда [16, p. 106], [20, p. 171]:

$$\boxed{\int\limits_{M^{2k}} E_{2k} dv = \chi(M^{2k}).} \tag{2.1}$$

2.2. Формулы Ревентоса для замкнутого риманова многообразия M^{2n+1}

В 1972 году Танно [17] доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $< M^{2n+1}, g, \xi >$ – компактное риманово ориентированное многообразие, имеющее единичное киллингово векторное поле ξ такое, что $R(X,\xi)Y = g(X,Y)\xi^- g(Y,\xi)X$ для любых векторных полей X, Y на M^{2n+1}, т.е. является сасакиевым многообразием. Тогда, если поле ξ – регулярное* [19], *то*

$$\frac{(-1)^n}{l(\xi)2^{2n}\pi^n n!} \int\limits_{M^{2n+1}} F(\Omega,\xi) = \sum_{r=0}^{n} (n+1-r)(-1)^r \beta_r(M^{2n+1}),$$

где $F(\Omega,\xi)$ – выражение, зависящее от Ω и ξ и $\beta_r(M^{2n+1})$ – r-мерное число Бетти, $l(\xi)$ – длина интегральной траектории поля ξ (она постоянна).

Теорема Танно была обобщена в 1979 году Ревентосом на произвольные римановы многообразия с симметрией.

Пусть $< M^{2n+1}, g, \xi >$ – замкнутое ориентированное риманово многообразие, имеющее единичное киллингово векторное поле ξ.

Тогда справедлива формула [18] в предположении, что поле ξ – регулярное[1] [19]:

$$\boxed{\frac{(-1)^n}{l(\xi)2^{2n}\pi^n n!}\int\limits_{M^{2n+1}} f(\Omega,\xi) = \sum_{r=0}^{n}(n+1-r)(-1)^r\beta_r(M^{2n+1}) + \sum_{r=0}^{n-1} d_r,} \tag{2.2}$$

где $d_r = \dim Ker(H^r(M^{2n+1}/\xi, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \to H^{r+2}(M^{2n+1}/\xi, \mathbb{R})$, $l(\xi)$ – длина интегральной траектории поля ξ (она постоянна).

Все интегральные кривые поля ξ гомеоморфны S^1, и можно построить главное расслоение

$$\pi : M^{2n+1} \to M^{2n+1}/\xi = B,$$

где B – множество всех орбит [19].

Выражение

$$f(\Omega,\xi) = \sum \eta^{i_1\dots i_{2n}}\left(\Psi^{i_2}_{i_1} + \sum_{ks}(A_{i_2i_1}A_{ks} + A_{i_2k}A_{i_1s})\phi^k\wedge\phi^s\right)\wedge \dots$$

$$\dots\wedge\left(\Psi^{i_{2n}}_{i_{2n-1}} + \sum_{ks}(A_{i_{2n}i_{2n-1}}A_{ks} + A_{i_{2n}k}A_{i_{2n-1}s})\phi^k\wedge\phi^s\right)\wedge\phi^0,$$

Ψ^i_j – форма кривизны на M^{2n+1} относительно метрики g,

$$\phi^0 = \omega, \quad \phi^i = \pi^*(\theta^i), \quad g = \sum_\alpha \phi^\alpha\otimes\phi^\alpha,$$

ω – 1-форма, определенная на M^{2n+1} как $\omega(X) = g(\xi, X)$, $\theta^1, \dots, \theta^{2n}$ – 1-формы, заданные в малом открытом множестве $U \subset B$ так, что $h = \sum_i \theta^i\otimes\theta^i$, а h риманова метрика на B, определенная равенством

$$h(X,Y)(b) = g(X',Y')(x) - (\omega\otimes\omega)(X',Y')(x),$$

$$d\pi_x(X')(x) = X, \quad d\pi_x(Y')(x) = Y, \quad \pi(x) = b, \quad x\in M^{2n+1},$$

$$d\omega = \pi^*(\sum_{ij} A_{ij}\theta^i\wedge\theta^j) \ \text{ с } \ A_{ij} = -A_{ji}.$$

При этом $A_{ij} = -g(e_i, \nabla_{e_j}\xi)$, $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ – базис в $T(B)$.

Формула (2.2) получена Ревентосом [18] из формулы Гаусса-Бонне-Черна для замкнутого ориентированного риманова $2n$-мерного многообразия $< B, h >$:

$$\int\limits_B Q = 2^{2n}\pi^n n!\chi(B),$$

[1] Условие регулярности выполняется, как правило, для всех векторных полей, встречающихся в приложениях.

где
$$Q = (-1)^n \sum \eta^{i_1...i_{2n}} \Omega^{i_2}_{i_1} \wedge ... \Omega^{i_{2n}}_{i_{2n-1}},$$
Ω – форма кривизны многообразия $< B, h >$, с помощью поднятия π^* и выражения $\chi(B)$ через числа Бетти $\beta(M^{2n+1})$.

2.2.1. Формула Ревентоса для замкнутого риманова многообразия M^3

В случая замкнутого ориентированного риманова мнгообразия M^3 с метрикой g, допускающего регулярное единичное киллингово векторное поле ξ, имеет место формула [18]:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi l(\xi)} \int\limits_{M^3} \{K(\xi^\perp) + 3K(\xi)\} dv = 2\beta_0(M^3) - \beta_1(M^3) + d_0,} \qquad (2.3)$$

где $d_0 = 0$ или 1 в зависимости от чётности или нечётности одномерного числа Бетти $\beta_1(M^3)$; $K(\xi^\perp)$ – значение римановой кривизны в плоскости, ортогональной ξ; $K(\xi)$ – значение римановой кривизны для любой плоскости, содержащей ξ (отметим, что $K(\xi)$ не зависит от выбора плоскости); dv – форма объёма; $l(\xi)$ – длина интегральной траектории поля ξ (она постоянна).

2.3. Формула Черна-Гаусса-Бонне для римановых многообразий M^{2k} с краем

Пусть M^{2k} – компактное ориентированное риманово многообразие с краем. Пусть $\pi : TM^{2k} \to M^{2k}$ – касательное расслоение и $\pi_0 = \pi|S \to M^{2k}$ – ассоциированное расслоение на сферы (т.е. состоящее из векторов касательного расслоения с нормой 1). Пусть Γ – связность на главном расслоении $p : SO(TM^{2k}) \to M^{2k}$ с формой кривизны K и пусть Ω единственная $2k$-форма на M^{2k} такая, что $p^*\Omega = \pi^{-k} Pf(K)$ [2] и Φ – $(2k-1)$-форма на S с $\pi_0^*\Omega = d\Phi$. Наконец, пусть $\nu : \partial M^{2k} \to S$ – внешняя единичная нормаль к ∂M^{2k}.

Тогда [21]

$$\boxed{\int\limits_{M^{2k}} \Omega = \chi(M^{2k}) + \int\limits_{\partial M^{2k}} \nu^*\Phi.} \qquad (2.4)$$

[2] Определение пфаффиана:
$$Pf(A) = \frac{1}{2^k k!} \varepsilon^{i_1...i_{2k}} A_{i_1 i_2} A_{i_3 i_4} ... A_{i_{2k-1} i_{2k}},$$
где $A = A_{ij}$.

2.4. Формула Черна-Гаусса-Бонне для римановых многообразий M^m с краем

Пусть M^m – ориентированное риманово многообразие с краем и

$$E_m = \frac{(-1)^p}{2^m \pi^p p!} \eta^{i_1 i_2 \dots i_m}_{12\dots(m)} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{m-1} i_m},$$

$$p = \left[\frac{m}{2}\right],$$

$$Q_{k,m} = c_{k,m} \sum \eta^{i_1 i_2 \dots i_{m-1}} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k-1} i_{2k}} \wedge \omega_{i_{2k+1} m} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{m-1} m},$$

$$c_{k,m} = \frac{(-1)^k}{\pi^p k! 2^{k+p} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p - 2k - 1)}.$$

Здесь

$$\Omega_{jk} = d\omega_{jk} - \sum_{1 \le \nu \le m} \omega_{j\nu} \wedge \omega_{\nu k},$$

$$\nabla e_j = \sum_{1 \le k \le m} \omega_{jk} e_k \quad \text{для} \quad \omega_{jk} \in T^*(M) \quad \text{и} \quad \omega_{jk} = -\omega_{kj},$$

$\{e_1, \dots, e_m\}$ – локальный ортонормированный базис в $T(M)$ такой, что e_m – единичная нормаль к краю ∂M^m.

Справедлива формула Гаусса-Бонне-Черна [16, p. 253]:

$$\boxed{\int\limits_{M^m} E_m + \int\limits_{\partial M^m} \sum_k Q_{k,m} = \chi(M^m).} \tag{2.5}$$

Замечание 1. Напомним, что $\chi(M^{2k+1}) = 0$ и, как доказал Черн,

$$E_m = -d \left(\sum_k Q_{k,m} \right).$$

Следовательно, в силу теоремы Стокса равенство (2.5) обращается для нечётномерных многообразий в тождество $0 = 0$.

2.5. Формула Гаусса-Бонне-Черна для компактных римановых многообразий M^4 с краем

Имеет место следующая формула [22] Гаусса-Бонне-Черна:

$$\boxed{\begin{gathered} 8\pi^2\chi(M^4,\partial M^4) = \int\limits_{M^4}\left(|W^{(4)}|^2 - \frac{1}{2}|Z^{(4)}|^2 - \frac{1}{24}[R^{(4)}]^2\right)d^{(4)}v- \\ -4\int\limits_{\partial M^4}\prod_{i=1}^{3}\lambda_i d^3v - \int\limits_{\partial M^4}\sum_{\sigma_i\in S^3}K_{\sigma_1\sigma_2}\lambda_{\sigma_3}d^3v, \end{gathered}} \tag{2.6}$$

где $\chi(M^4,\partial M^4)$ – характеристика Эйлера-Пуанкаре многообразия с краем M^4, W – тензор Вейля, $Z = Ric - (R/4)g$, Ric – тензор Риччи, R – скалярная кривизна, $K_{\sigma_1\sigma_2}$ – секционная кривизна, λ_i – главные кривизны многообразия ∂M^4.

3. Сигнатурные формулы

3.1. Сигнатура многообразия

Сигнатура многообразия M^n определяется для $n = 4k$. Если M^{4k} связное и ориентированное, то $\cup$-произведение когомологий $H^{2k}(M^{4k},\mathbb{R})$:

$$H^{2k}(M^{4k},\mathbb{R})\cup H^{2k}(M^{4k},\mathbb{R})\to H^{4k}(M^{4k},\mathbb{R})$$

является коммутативным.

Если предположить, что M^{4k} компактно, то в силу двойственности Пуанкаре $H^{4k}(M^{4k}) \cong H^0(M^{4k})$. Поскольку $H^0(V^{4k})$ является одномерным векторным пространством, то считаем, что $H^0(M^{4k}) = \mathbb{R}$ и имеем следующую билинейную форму:

$$Q: H^{2k}(M^{4k},\mathbb{R})\cup H^{2k}(M^{4k},\mathbb{R})\to\mathbb{R}.$$

Таким образом, определена квадратичная форма $Q(\alpha,\alpha)$ со значениями в $\mathbb{R}$, где $\alpha\in H^{2k}(M^{4k},\mathbb{R})$. Ее сигнатура, т.е. разность $\sigma(M^{4k}) = p(M^{4k}) - n(M^{4k})$ между числом положительных $p(M^{4k})$ и отрицательных $n(M^{4k})$ собственных значений, называется *сигнатурой многообразия* M^{4k}.

В случае когомологий де Рама $\alpha,\beta\in H^{2k}_{dR}(M^{4k},\mathbb{R})$

$$Q(\alpha,\beta) = \int\limits_{M^{4k}}\alpha\wedge\beta.$$

3.2. Формулы для сигнатуры замкнутого псевдориманова многообразия

Если $\sigma(M^{4k}) = p(M^{4k}) - n(M^{4k})$ – сигнатура[3] псевдориманова многообразия $\langle M^{4k}, g\rangle$, то имеет место формула [14]:

$$\boxed{\sigma(M^{4k}) = \frac{(-1)^p}{(2\pi)^{2k}(2k)!3^k}\int\limits_{M^{4k}} \Delta_{4k}\, dv,} \tag{3.1}$$

где

$$\Delta_{4k} = \frac{(-1)^p}{(2\pi)^{2k}(2k)!2^{2k}} R^{\alpha}_{\beta,\lambda_1\lambda_2} R^{\beta}_{\gamma,\lambda_3\lambda_4} \dots R^{\delta}_{\alpha,\lambda_{4k-1}\lambda_{4k}} \eta^{\lambda_1\dots\lambda_{4k}}.$$

Для 4-мерного многообразия имеем:

$$\boxed{\sigma(M^4) = \frac{(-1)^p}{96\pi^2}\int\limits_{M^4} R^{i}_{\cdot jj_1j_2} R^{\;j}_{i\cdot j_3j_4} \eta^{j_1j_2j_3j_4} \cdot dv} \tag{3.2}$$

или

$$\boxed{\sigma(M^4) = \frac{(-1)^p}{96\pi^2}\int\limits_{M^4} W_{ijkl} W^{ij}{}_{mn} \eta^{klmn} \cdot dv.} \tag{3.3}$$

Замечание 2. Если M^4 – пространство-время, т.е. $p = 1$, а W принадлежит типу III Петрова, то, как известно (L. Bel, 1960, см. [10]), $W_{ijkl}W^{ij}{}_{mn}\eta^{klmn} = 0$. Значит, мы имеем $\sigma(M^4) = 0$, тогда как (метрическая) сигнатура $\tau(M^4) = -2$.

3.3. Формула Хирцебруха для сигнатуры многообразия

3.3.1. Теорема Хирцебруха и L-род

Существуют однозначно определенные полиномы $L = \{L_k\}$ такие, что для любого ориентированного многообразия выполняется *сигнатурная теорема Хир-*

---

[3] Под сигнатурой замкнутого псевдориманова многообразия часто понимают число $\tau(M^4) = p - (2k - p)$, где p – число, входящее в сигнатуру $<\underbrace{+\dots+}_{p}\underbrace{-\dots-}_{4k-p}>$. Числа $\sigma(M^{4k})$ и $\tau(M^4)$ – это разные числа и по смыслу, и по значениям, как видно из замечания 2.

цебруха:

$$\boxed{\sigma(M^{4k}) = L_k(p_1, p_2, ..., p_k)[M^{4k}]} \tag{3.4}$$

или

$$\boxed{\sigma(M^{4k}) = \sum_{\substack{(j_1,...j_k) \\ j_1+...+j_r=k}} l_k^{(j)} p_{j_1}...p_{j_r}[M^{4k}],} \tag{3.5}$$

где $p_j(\xi) \in H^{4j}(M^{4k}, \mathbb{R})$ – j-й класс Понтрягина,

$$L_k(p_1, p_2, ..., p_k) = \sum_{\substack{(j_1,...j_k) \\ j_1+...+j_r=k}} l_k^{(j)} p_{j_1}...p_{j_r}.$$

Обычно о содержании формул (3.4), (3.5) говорят, что *сигнатура многообразия равна L-роду.*

Первые четыре полинома имеют вид:

$$L_0 = 1, L_1 = p_1/3, L_2 = (7p_2 - p_1^2)/45,$$

$$L_3 = (62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3)/945.$$

Следовательно, сигнатура 4-мерного замкнутого многообразия равна

$$\sigma(M^4) = \frac{1}{45}(7p_2[M^4] - p_1^2[M^4]).$$

Имеется алгоритм [15, § 19] вычисления полиномов L_k, использующий ряд

$$\frac{\sqrt{z}}{\operatorname{th}\sqrt{z}} = \sum_{k\geq 0} \frac{2^{2k}B_{2k}z^k}{(2k)!} = 1 + z/3 - z^2/45 + ...$$

где B_{2k} – числа Бернулли.

В случае представления классов p_k в виде дифференциальных $4k$-форм, т.е. при переходе к когомологиям де Рама, $p_k \in H_{dR}^{4k}(M^{4k}, \mathbb{R})$, – формула (3.5) принимает вид

$$\boxed{\sigma(M^{4k}) = \sum_{\substack{(j_1,...j_k) \\ j_1+...+j_r=k}} l_k^{(j)} \int\limits_{M^{4k}} p_{j_1} \wedge ... \wedge p_{j_r}.} \tag{3.6}$$

3.3.2. Выражение классов Понтрягина через тензор кривизны

На римановом многообразии M^{4k} классы Понтрягина

$$p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + p_2(\xi) + ... + p_k(\xi)$$

выражаются через кривизны [25]:

$$p_s(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{2s}(2s)!} \sum \eta^{j_1...j_{2s}}_{i_1...i_{2s}} \Omega^{i_1}_{j_1} \wedge ... \wedge \Omega^{i_{2s}}_{j_{2s}}. \tag{3.7}$$

Если использовать формулу

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} dx^k \wedge dx^l$$

и подставить ее в формулу (3.7), то получаем представление классов Понтрягина в когомологиях де Рама в терминах тензора кривизны:

$$p_s(\xi) = \frac{1}{(4\pi)^{2s}(2s)!} \sum \eta^{j_1...j_{2s}}_{i_1...i_{2s}} R^{i_1}_{\cdot j_1 l_1 m_1} ... R^{i_{2s}}_{\cdot j_{2s} l_{2s} m_{2s}} dx^{l_1} \wedge dx^{m_1} \wedge ... \wedge dx^{l_{2s}} \wedge dx^{m_{2s}}.$$

3.3.3. Выражение чисел Понтрягина через тензор кривизны

Пусть дано замкнутое ориентированное многообразие M^{4k} и пусть $(j) = (j_1, ..., j_k)$ – разбиение числа k, т.е. все $j_i > 0$ и $j_1 + ... + j_r = k$. Определим число Понтрягина $p_{(j)}[M^{4k}]$ как число равное

$$\langle p_{j_1}(\xi)...p_{j_1}(\xi), \mu_{M^{4k}} \rangle.$$

При представлении классов $p_k(\xi)$ в виде дифференциальных $4k$-форм, т.е. при переходе к когомологиям де Рама, это определение означает [25], что

$$\boxed{p_{(j)}[M^{4k}] = \int\limits_{M^{4k}} p_{j_r} \wedge ... \wedge p_{j_r} = \int\limits_{M^{4k}} g \cdot dv,} \tag{3.8}$$

где dv – форма объема и функция

$$g(x) = \frac{1}{c} \sum_{l_1,...,l_{4k}} \eta^{l_1...l_{4k}} F_{l_1...l_{4k}},$$

$$c = 2^{4k} \pi^{2k} \prod_{i=1}^{r} (2j_i)!(4j_i)!,$$

а $F_{l_1...l_{4k}}$ – произведение следующих r функций:

$$\sum \eta_{i_1 \dots i_{2j_1}}^{m_1 \dots m_{2j_1}} \sum \; sgn(\sigma) R_{l_{\sigma(1)} l_{\sigma(2)} i_1 m_1} \dots R_{l_{\sigma(4j_1-1)} l_{\sigma(4j_1)} i_{2j_1} m_{2j_1}},$$

....

....

$$\sum \eta_{i_1 \dots i_{2j_r}}^{m_1 \dots m_{2j_r}} \sum \; sgn(\sigma) R_{l_{\sigma(4k-j_r+1)} l_{\sigma(4k-j_r+2)} i_1 m_1} \dots R_{l_{\sigma(4k-1)} l_{\sigma(4k)} i_{2j_r} m_{2j_r}},$$

относительно любого ортонормированного базиса в касательном пространстве $T_x(M^{4k})$. Здесь σ обозначает перестановку в множествах индексов $\{1, ..., 4j_1\}, \{4j_1+1, ..., 4(j_1+j_2)\}, \{4k-j_r+1, ..., 4k\}$, определенных разбиением (j).

3.3.4. Формула Хирцебруха

Поскольку числа Понтрягина на замкнутом ориентированном римановом многообразии выражаются через кривизны Ω или R, то сигнатура многообразия вычисляется через кривизну, и имеет место *формула Хирцебруха*:

$$\boxed{\sigma(M^{4k}) = \int\limits_{M^{4k}} L_k \left(\frac{\Omega}{\pi}\right) dv} \qquad (3.9)$$

или

$$\boxed{\sigma(M^{4k}) = \int\limits_{M^{4k}} L_k \left(\frac{R}{\pi}\right) dv.} \qquad (3.10)$$

Литература

1. Gauss, C.F. Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827 / C.F. Gauss // In: Dombrowski P. '150 Years After Gauss' 'Disquisitiones generales circa superficies curvas', Astérisque 62. – Paris: Soc Math de France, 1979.
2. Bonnet, O. Mémoire sur la théorie générale des surfaces / O. Bonnet // J. de l'Ecole Polytechnique. 1848. V. 19(32). P. 1–146.
3. von Dyck, W. Beiträge zur analysis situs / W. von Dyck // Math. Ann. – 1888. – B. 32. – S. 457–512.
4. Wu, H. Historical development of the Gauss-Bonnet theorem / H. Wu // Science in China Series A: Mathematics Apr. – 2008. – V. 51, N. 4. – P. 777–784.
5. Allendoerfer, C.B. The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra / C.B. Allendoerfer, A. Weil // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – V. 53. – P. 101–129.
6. Chern, S.S. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds / S.S. Chern // Ann. of Math. – 1944. – V. 45. – P. 747–752.

7. Chern, S.S. Pseudo-Riemannian Geometry and the Gauss-Bonnet Formula / S.S. Chern // Ann. Acad. Brasil Ci. – 1963. – V. 35. – P. 17-26.
8. Chern, S.S. Historical remarks on Gauss-Bonnet / S.S. Chern // In: Analysis, et cetera, Volume in Honor of Jourgen Moser. New York: Academic Press, 1990. – P. 209–217.
9. Avez, A. Formula de Gauss-Bonnet-Chern en métrique de signature quelconque / A. Avez // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1962. – T. 255. – P. 2049-2051.
10. Avez, A. Characteristic Classes and Weyl Tensor: Applications to General Relativity / A. Avez // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 1970. – V. 6, N. 2. – P. 265-268.
11. Pelletier, F. Quelques proprietes géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singuliéres / F. Pelletier // Annales de la faculé des sciences de Toulouse 6^e série. – 1995. – T. 4, N. 1. – P. 87-199.
12. Дубровин, Б.А. Современная геометрия / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, Ф.Т. Фоменко. – М.:Наука, 1979.
13. Alty, L.J. The Generalised Gauss-Bonnet-Chern Theorem / L.J. Alty // J.Math.Phys. – 1995. – V. 36. – P. 3094-3105.
14. Zund, J.D. Pontjagin numbers and pseudo-Riemannian geometry / J.D Zund // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1966. – V. 72, N. 1.– P. 319-324.
15. Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы / Дж. Милнор, Дж. Сташеф. – М.: Мир, 1979.
16. Gilkey, P.B. Invariance theory, the heat equation, and the Atiyan-Singer index theorem [Электронный ресурс]. – Режим доступа: – http://www.emis.de/monographs/gilkey/ (13.10.09).
17. Tanno, S. A formula on some odd-dimensional Riemannian manifolds related to the Gauss-Bonnet formula / S. Tanno // J. Math. Soc. Japan. – 1972. – V. 24. – P. 204-212.
18. Revenós, A. On the Gauss-Bonnet formula on the odd-dimensional manifolds / A. Reventós // Tohoku Math. J. – 1979. – V. 31, N. 2. – P. 165-178.
19. Palais, R. A global formulation of the Lie theory of transformation groups / R. Palais // Memoir of the Amer. Math. Soc. – 1957. – N. 22.
20. Chern, S.S. Lectures on Differential geometry / S.S. Chern, W.H. Chen, K.S. Lam. – World Scientific, 2000.
21. Spivak, M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. V.5 / M. Spivak – Berkeley: Publish or Perish inc., 1979.
22. Anderson, M.T. L^2 Curvature and Volume renormalization of AHE metrics on 4-manifolds / M.T. Anderson // Mathematical Research Letters. – 2001. – V. 8. – P. 171–188.
23. Bao, D. A Note on the Gauss-Bonnet theorem for Finsler spaces / D. Bao, S.S. Chern // Ann of Math. – 1996. – V. 143(2). – P. 233–252.
24. Bell, D. The Gauss-Bonnet theorem for vector bundles [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:math/0702162v1 (2007).
25. Galaz-Garcia, E. Bounds of characteristic numbers by curvarure and radius / E. Galaz-Garsia // Rocky Mountain J. Math. – 2009. – V. 39, N. 4. – P. 1225-1231.
26. Hsiung, C.-C. Curvature and characteristic classes of compact pseudo-Reimannian manifold / Chuan-Chih Hsiung, J.J. Levko // Rocky Mountain J. Math. – 1971. – V. 1, N. 3. – P. 523-536.

Математические структуры и моделирование
2009, вып. 20, с. 26–47

УДК 514.82

ОПИСАНИЕ ОДНОРОДНЫХ АФФИННЫХ ПРИЧИННЫХ ПОРЯДКОВ НА ТРЕХМЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ

Е.В. Мякишева

В статье исследуются однородные аффинные причинные порядки на трехмерных разрешимых группах Ли относительно аффинной структуры С.П. Гаврилова.

Введение

В данной работе ставилась задача исследования однородных аффинных причинных порядковых структур, задаваемых эллиптическими конусами на трехмерных разрешимых группах Ли, снабженных полной левоинвариантной аффинной канонической [5] структурой.

Однородные конусы в n-мерном аффинном пространстве изучались Э.Б. Винбергом [4]. Он алгебраически описал выпуклые конусы с острой вершиной, внутри которых транзитивно действует группа порядковых автоморфизмов $Aut(\mathcal{P})$. Семейство равных и параллельных конусов $\{C_x\}$ в A^n, $n \geq 3$, где C_x - множество лучей, исходящих из одной точки x, исследовал А.Д. Александров [3]. Он описал конусы C_x, на которых транзитивно действует группа Γ – биекций $f\colon A^n \to A^n$ таких, что $f(C_x) = C_{f(x)}$, удовлетворяющая условию: для любых $y \in C_x$, $y' \in C_{x'}$ существует $h \in \Gamma$ такая, что $h(x) = x'$ и $h(y) = y'$.

В настоящей работе рассматривались эллиптические конусы, задающие левоинвариантный аффинный причинный порядок относительно канонической аффинной структуры на трехмерных связных односвязных группах Ли. Проводилось исследование для выявления однородных порядков.

Исследование показало, что на группах Ли G_3I, G_3VI_0, G_3VII_0 класса 1 (в обозначениях С.П. Гаврилова [5]) аффинный причинный порядок является одновременно int - однородным, ∂ - однородным и ext - однородным. В остальных случаях порядок не является однородным ни в одном из указанных смыслов (Теорема 2).

Получен был также следующий результат. Если через H обозначим группу Ли аффинных преобразований относительно канонической аффинной структуры, сохраняющих изотропные векторы левоинвариантной лоренцевой метрики

Copyright © 2009 **Е.В. Мякишева.**
Омский государственный университет.
E-mail: elena-myakisheva@yandex.ru