

## КАТАСТРОФЫ ТИПА «БАБОЧКА» В ЭВОЛЮЦИИ ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМ

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц

Предлагается описание катастроф в экологии лесных биоценозов с помощью математической теории катастроф. Модель позволяет проводить качественное прогнозирование экологических катастроф и показывает, к каким равновесным состояниям устремляется лесная экосистема после катастрофы.

Лес – это элемент географического ландшафта, состоящий из совокупности деревьев, занимающих доминирующее положение, кустарников, напочвенного покрова, животных и микроорганизмов, в своем развитии биологически взаимосвязанных, влияющих друг на друга и на внешнюю среду.

В этой статье ставится задача построения математической динамической модели смены равновесных состояний лесных экосистем, с чьей помощью можно было бы проводить прогнозирование экологических катастроф, при которых лесная экосистема теряет равновесие и устремляется к новому. Предложенная модель способна давать ответы на вопросы: каковы эти равновесия, когда они нарушаются, к каким равновесиям система перейдет и сколько новых равновесий может быть?

Модель основывается на четырех управляющих внешних факторах, задающих среду экосистемы. Это влажность почвы  $w$ ; оконная динамика  $u$ , определяющая мозаичность фитоценоза; наличие конкуренции  $l$  и антропогенное вмешательство  $v$  в лесную экосистему (вырубка леса, пожары и т.д.). Модель может быть усложнена за счет введения дополнительных управляющих внешних факторов, но при этом она становится менее наглядной и требует при ее использовании уже гораздо более серьезных математических знаний.

### 1. Характеристики лесных экосистем

#### 1.1. Факторы, влияющие на видовое разнообразие и богатство лесной экосистемы

1. Видовое богатство и видовая насыщенность зависят от многих факторов, в первую очередь от условий существования фитоценоза. Главными лимитирую-

щими факторами видового разнообразия являются температура, *влажность* и наличие пищевых ресурсов [1].

2. Условия произрастания могут сильно различаться по теплообеспеченности, *влажности* и богатству почв в пределах одного региона [1].

3. Видовое разнообразие взаимосвязано и с разнообразием условий конкретной среды обитания [1].

3. Сказывается и воздействие человека, и степень изменения среды самим сообществом (максимальная в лесах и минимальная в пустынях) [1].

## 1.2. Ярусность

Распределение растений по надземным *ярусам* определяет неодинаковая освещенность, которая приводит к различиям в температурном режиме и режиме влажности.

Каждый ярус, входящий в состав фитоценоза, оказывает влияние на другие ярусы и в свою очередь подвергается их влиянию. Поэтому фитоценоз необходимо рассматривать как нечто целое, а ярусы фитоценоза — как его структурные части, которые в некоторых случаях могут быть относительно самостоятельными.

Дюрье выделяет крупные ярусы: деревьев, кустарников, трав, напочвенного покрова, а в пределах этих ярусов — подъярусы:

– верхний, *первый ярус А*, образуют деревья. Его *подъярус А.1* состоит из высоких деревьев; *подъярус А.2* – деревья второй величины – рябина обыкновенная, черёмуха обыкновенная, ива козья, дикая яблоня.

– *второй ярус леса В* состоит из кустарников, образующих подлесок, – лещина обыкновенная, жимолость лесная, крушина ломкая, бересклет европейский.

– *третий ярус С* леса состоит из трав. Подъярус высоких трав – чистец лесной, бор развесистый, борцы; подъярус низких трав – сныть обыкновенная, осока волосистая, пролестник многолетний и др.

– *четвёртый ярус D* – мхи, грибы, лишайники.

Ярусное расположение растений связано с неодинаковой освещённостью. Количество света уменьшается от яруса к ярусу. Много света получают деревья первого яруса и очень мало – мхи и лишайники. В еловом лесу кустарники не растут – ветви елей задерживают очень много света, в таком лесу всегда сумрачно.

Ярусами располагаются и корни от лесных растений. Это позволяет поглощать воду, минеральные вещества из разных по глубине слоев земли.

«Каждый ярус, входящий в состав фитоценоза, оказывает влияние на другие ярусы и в свою очередь подвергается их влиянию. Поэтому фитоценоз необходимо рассматривать как нечто целое, а ярусы фитоценоза — как его структурные части, которые в некоторых случаях могут быть относительно самостоятельными» [1].

«Многоярусные биоценозы, представленные большим количеством видов растений, животных и микроорганизмов, связанных между собой разнооб-

разными пищевыми и пространственными отношениями, называются сложными. Они наиболее устойчивы к неблагоприятным воздействиям. Исчезновение какого-либо вида существенно не отражается на судьбе таких биоценозов. В них происходит лишь незначительная перестройка организации, при которой популяции одного и даже нескольких видов могут заменяться экологически близкими видами, а стабильность сообщества определяется количественной регуляцией численности одних видов другими» [1].

### 1.3. Мозаичность. Оконная динамика

Обычно фитоценоз не бывает совершенно одинаковым на всем своем протяжении.

Горизонтальная неоднородность фитоценоза характеризуется *мозаичностью*.

«*Мозаичность* – горизонтальное расчленение внутри фитоценоза, обусловленное ценотическими факторами. Причины ее разные:

– неравномерность условий существования, вызванная жизнедеятельностью тех или иных растений: различия в затенении, химизме и физических особенностях опада, в нанорельефе;

– результат деятельности животных, выбрасывающих на поверхность почву из глубоких горизонтов (землерои) или нарушающих в некоторых участках обычный строй растительного сообщества (грызуны);

– способ роста тех или иных растений, образующих кочки или куртины. Так, высокие кочки, образуемые осокой дернистой на болотах, способствуют возникновению весьма разнообразных микроценозов на вершинках, на откосах и в понижениях между кочками» [1].

Основным механизмом смены поколений деревьев, поддержания специфической мозаичности лесов и высокого биологического разнообразия во многих типах леса является динамика, связанная с гибелью отдельных старых деревьев или их групп, образование за счет этого «окон» в пологе древостоя и формирование в этих окнах групп молодых деревьев. Этот механизм постепенной смены поколений деревьев получил название *оконной динамики* (а соответствующая ей мозаичность лесных экосистем – *оконной мозаики*).

Для лесов, где существует оконная динамика, характерны следующие особенности:

– высокая мозаичность древостоя и всех остальных ярусов леса, связанная с постоянным вываливанием или (реже) усыханием «на корню» отдельных старых деревьев, их групп или целых участков древостоя и формированием на их месте новых, более молодых групп деревьев, а также преобладание или значительная доля участков с низкой сомкнутостью крон деревьев и высокой освещенностью нижних ярусов леса. Непрерывность процесса гибели крупных деревьев и образования окон обеспечивает поддержание разновозрастности древостоев, их стабильности во времени (при рассмотрении больших площадей леса)

и сложной световой мозаики под пологом леса. Благодаря этой световой мозаике и наличию под пологом леса сильно освещенных участков, в таких лесах можно встретить как исключительно теневыносливые виды растений, например кислицу или седмичник, так и светолюбивые виды – малину, иван-чай и другие;

– непрерывный популяционный возрастной спектр большинства древесных пород, образующих древостой. В норме подобные леса являются полидоминантными с господством темнохвойных пород и примесью лиственных – в южной тайге ильма, липы, клена, дуба, ясеня, березы, в средней и северной тайге – березы. Как правило, темнохвойные породы деревьев (ель, пихта, сосна сибирская) характеризуются непрерывным возрастным спектром и наличием всех возрастных стадий и возрастов деревьев (всходы могут отсутствовать, что связано с неежегодным обильным образованием еловых семян). Лиственные породы деревьев могут не иметь непрерывного возрастного спектра, что связано как с меньшей их долей в составе древостоя по количеству особей (и, соответственно, большими флуктуациями численности), так и с большей их зависимостью от размера образующихся окон (и, соответственно, большей зависимостью от действия ураганов, экстремальных погодных условий, вспышек численности вредителей и болезней);

– наличие большого количества валежа разных размерных классов и разных степеней разложения, а также ветровального почвенного микрорельефа (включающего западины и бугры ветровально-почвенных комплексов разного размера и возраста). Валеж и ветровальный почвенный микрорельеф создают высокую степень неоднородности субстратных условий под пологом леса, обеспечивая, совместно со световой мозаикой, высочайшее разнообразие экологических ниш и возможность сосуществования в пределах одного участка леса огромного количества видов растений и животных;

– наличие мощных, насыщенных органическим веществом верхних почвенных горизонтов, обеспечивающее, вместе с валежом и ветровальным микрорельефом, высокую влагоудерживающую способность этих лесных экосистем, преобладание внутрипочвенного стока над поверхностным и поддержание особого микроклимата под пологом леса, характеризующегося повышенной влажностью воздуха и верхних почвенных горизонтов и, как следствие, сглаженными суточными колебаниями температуры;

– как правило, значительное участие или преобладание в составе травяно-кустарничкового яруса видов из группы таежного крупнотравья – щитовника австрийского, кочедыжника женского, диплазиума сибирского и других крупных папоротников, бодяков огородного и разнолистного, цицербиты альпийской или уральской и многих других сходных с ними по экологии видов растений.

Леса с оконной динамикой древесного яруса имеют ключевое значение для сохранения в естественных условиях большого количества видов таежной флоры и фауны. Кроме того, благодаря огромному количеству запасенного в почве этих лесов и на ее поверхности мертвого органического вещества, эти леса имеют очень большое водорегулирующее (как эффективная природная губка) и климаторегулирующее (как резервуары исключенного из атмосферного круговорота углерода) значение. К сожалению, таких лесов сохранилось очень мало,

и с каждым годом их площадь сокращается все сильнее и сильнее – прежде всего под воздействием вырубок и возникающих вокруг них и лесовозных дорог пожаров.

#### 1.4. Атмосфера

«Рост и развитие растительности зависят от температуры, влажности воздуха, его движения и состава, но и наоборот – состав, высота, ярусность и густота растительности влияют на эти свойства атмосферы» [1].

#### 1.5. Влажность почвы. Засуха. Избыток влаги

Для лесов опасность представляет не только засуха, нехватка влаги в почве, но и вымокание.

«Под вымоканием лесов понимается угнетение и гибель лесных массивов вследствие длительного застоя воды, заболачивания территории, подъема уровня грунтовых вод и засоления почв. Проблема вымокания лесов характерна для равнинных, слабо дренированных районов, с неглубоким залеганием грунтовых вод и повышенным увлажнением. В частности, она актуальна для обширных районов Западно-Сибирской равнины. В условиях повышенной обводненности грунтов и заболоченности прокладка автомобильных дорог и магистральных нефте- и газопроводов требует возведения мощных насыпей, что приводит к нарушению гидрологического режима и как результат – к деградации и вымоканию лесных массивов <...>

При вымокании происходят изменения в анатомии древесной растительности, в видовом составе травяного покрова, что в конечном итоге приводит к смене одной экосистемы на другую: на месте лесов возникают болота» [2].

#### 1.6. Пожары

Пожары являются важным фактором, способным вывести лесную экосистему из равновесия и способствовать развитию экологической катастрофы. При лесных пожарах повреждается или полностью уничтожается растущий лес вместе с подлеском, подростом и травяным покровом. В связи с этим утрачивается источник получения древесины и резко снижаются водоохранно-защитные и санитарно-гигиенические свойства леса. Пожары уничтожают гнезда птиц и местообитания зверей, способствуют размножению вредных насекомых.

«Лесные пожары очень существенно влияют на экологию лесов, включая формирование круговорота углерода. Пожары инициируют новую сукцессию полога леса и, таким образом, регулируют аккумуляцию углерода, определяемую первичной продукцией. Пожары воздействуют, помимо этого, на тепловой режим почвы, что, в свою очередь, оказывает влияние на процессы дыхания почвы. Наконец, следствием лесных пожаров оказывается их влияние на круговорот углерода в региональных и глобальных масштабах, обусловленное выбросами углерода в атмосферу и последующим дальним переносом <...>

С одной стороны, – лесные пожары – это стихия природного (а иногда и антропогенного) происхождения, причиняющая серьезный материальный ущерб. С другой стороны, – пожары – необходимый компонент эволюции лесов, обеспечивающий их обновление» [3].

### 1.7. Вырубка лесов

Вырубка леса без мер по его восстановлению означает обеслесивание и, следовательно, фактически наступающую экологическую катастрофу. К примеру, вырубка лесов резко изменяет характер стока и гидрологический режим рек, вызывает бурные весенние паводки и резкое обмеление рек в летнее время, водоохранные свойства леса снижаются или пропадают полностью.

Рубки в лесных экосистемах необходимо рассматривать как антропогенный фактор возможной потери равновесия экосистемой.

### 1.8. Принцип конкурентного исключения

*Принцип конкурентного исключения* гласит: если два вида конкурируют за одну экологическую нишу<sup>1</sup>, есть только два возможных исхода. Либо эти два вида немного изменятся и каждый займет немного другую нишу (дифференциация ниш), либо один из видов обречен на вымирание<sup>2</sup>.

«Конкуренция отмечается между особями одного вида (внутривидовая борьба) и между особями разных видов (межвидовая борьба) в неблагоприятных условиях среды.

Оба типа борьбы обычно тесно связаны друг с другом. В борьбе за пищу, за влагу, с вредителями и паразитами растения конкурируют и с особями своего вида, и с особями других видов» [1].

### 1.9. Доброкачественность

Моделирование экологии лесных биоценозов, если мы желаем иметь численный показатель *качества лесной экосистемы x*, требует начать с определения этого показателя. Мы прежде всего предлагаем название для требуемого показателя, вводя термин *доброкачественность лесной экосистемы*.

Конкретное значение доброкачественности лесной экосистемы, находящейся в состоянии *равновесия*, будем интерпретировать как конкретное растительное сообщество. Смена равновесия, сопровождающаяся изменением значения доброкачественности лесной экосистемы, – это смена одних сообществ другими (динамика растительного покрова по Сукачёву).

Доброкачественность лесной экосистемы может быть охарактеризована достаточно большим числом количественных показателей, которые получаются при проведении различных замеров, производимых в лесной экосистеме.

<sup>1</sup>Под экологической нишей подразумевают совокупность факторов окружающей среды, в пределах которых данный вид может развиваться и воспроизводиться.

<sup>2</sup>См. сайт <http://elementy.ru>

Перечислим некоторые из них [1]:

1. *Бонитет*<sup>3</sup> леса – показатель продуктивности леса, зависящий от почвенно-грунтовых и климатических условий (местообитания). Определяется средней высотой деревьев господствующей породы насаждения с учётом его возраста. В советской таксационной практике пользуются шкалой классов бонитета, составленной в 1911 г. проф. М.М.Орловым. По бонитировочной шкале насаждения делятся на 5 классов бонитета, обозначаемых римскими цифрами. К I классу относят насаждения наиболее продуктивные, к V классу – наименее продуктивные. Нередко число классов бонитет леса увеличивают, например знаком Ia обозначают насаждения с продуктивностью выше I класса и знаком Va – ниже V класса. Для всех древесных пород принята общая бонитировочная шкала. Для семенных и порослевых насаждений установлены особые шкалы.

2. Показатели *численности видов* и их динамика являются одними из основных в изучении растительности. Численность определяется визуально и инструментально, но чаще визуально. Всегда на учетной единице: площади (дм, м<sup>2</sup>, км<sup>2</sup>, га), длины (м, км), объема (м<sup>3</sup>, 10 дм<sup>3</sup>), времени (час, сутки) и т.д. [1].

3. Количественное соотношение видов в биоценозе, или *индекс разнообразия H*, чаще всего определяется по формуле Шеннона:

$$H = - \sum_i p_i \log p_i,$$

где  $p_i$  – доля вида в сообществе [1].

4. *Встречаемость* (частота встречаемости, коэффициент встречаемости) – это относительное число выборок, в которых встречается вид. Если выборка состоит из 100 учетных площадок, а вид отмечен на 43-х, то и встречаемость равна 43%. При встречаемости 25% вид встречается в каждой четвертой площадке учета и он случайный. Высокая встречаемость, если вид отмечен более чем на 50% уч. пл. Обычно закладывается 50 уч. пл., но не менее 25 [1].

5. *Обилие* – это количество особей вида на единице площади или объема. Наиболее часто используются шкалы обилия Друде и Хульта.

6. *Покрытие* – процент площади, покрываемой надземными частями растений. Процент площади, занятой основаниями растений, – истинное покрытие, верхними частями – проективное. Проективное покрытие – обязательный показатель при изучении напочвенного покрова.

7. *Биомасса* – общие запасы органического вещества, накопленные к моменту учета. Выражаются в массе абсолютно-сухого, воздушно-сухого или сырого вещества. Биомасса растений – растительная масса, фитомасса; биомасса животных – зоомасса. Биомасса, ее фракционная структура, скорость накопления (продукция – прирост биомассы за определенный промежуток времени) являются важнейшими интегральными показателями жизнедеятельности организмов. Они дают возможность оценить роль каждого фактора и популяции в формировании биогеоценоза, оценить запасы биологических и пищевых ресурсов, сделать кратко- и долгосрочные прогнозы развития сообществ, предсказать

<sup>3</sup>Bonitas (лат.) – доброкачественность.

пути их трансформации и разработать мероприятия по охране и рациональному использованию любого из ресурсов. Именно поэтому изучение биологической продуктивности и было положено в основу упомянутой в одной из предыдущих лекций Международной биологической программы (МБП).

8. *Степень доминирования* – отношение (обычно в процентах) числа особей данного вида к общему числу всех особей рассматриваемой группировки. Степень доминирования – отношение (обычно в процентах) числа особей данного вида к общему числу всех особей рассматриваемой группировки.

К этим характеристикам можно добавить и другие:

9. *Продуктивность древостоя* – количество стволовой древесины, коры, сучьев, ветвей, листьев, хвой и корней древостоя на единицу площади.

10. *Санитарное состояние леса* – характеристика леса, содержащая сведения о его захламленности, наличии усыхающих и сухостойных деревьев.

11. *Суховершинность* – наличие сухой вершины у растущего дерева.

12. *Влажность древесины* – отношение массы воды, содержащейся в древесине, к массе древесины, в процентах.

13. *Обстоятельство, определяющее видовую насыщенность и видовое богатство: возраст данного фитоценоза*, т. е. продолжительность времени, в течение которого растения, входящие в состав фитоценоза, сживались друг с другом.

## 2. Модель доброкачественного леса

В § 1.9 перечислены всевозможные показатели  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 13$ , которые могут быть взяты как показатель доброкачественности лесной экосистемы.

Однако лучше всего ввести интегральный показатель доброкачественности, имеющий вид

$$x = \sum_{j=1}^{13} w_j x_j,$$

где  $w_j$  – вес показателя  $x_j$ , т.е. его вклад (доля) в интегральный показатель. Значения показателя  $x$  в момент времени  $t$  обозначаем как  $x(t)$ . Это число принимается нами как степень доброкачественности лесного биоценоза.

Очевидно, что такой подход является крайне упрощенным, но любая модель есть определенное упрощение и со временем, естественно, может быть усложнена.

Степень доброкачественности лесного биоценоза в момент времени  $t$  будет определять доброкачественность леса в следующий момент времени  $t + dt$ .

Иначе говоря,

$$x(t + dt) = x(t) + A(t, x)dt, \quad (1)$$

где  $A(t, x)dt$  – величина, описывающая отклонения в степени доброкачественности леса, произошедшие на отрезке времени  $dt$ .

Из (1) имеем то, что называется дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x). \quad (2)$$



В основе продуктивного процесса растений лежит фотосинтез. Растения под воздействием солнечной энергии, поглощая листьями из атмосферы углекислый газ и корневой системой из почвы *воду*, создают органическое вещество. Недостаток влаги  $(-w) > 0$  является фактором, не способствующим благополучию леса.

В таком случае следует в правую часть дифференциального уравнения (2) добавить член  $-(-w)$ :

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x) - (-w). \quad (3)$$

В самом простом случае можно принять, что  $A(t, x) = k_1x$ , т.е.

$$\frac{dx}{dt} = k_1x + w. \quad (4)$$

Коэффициент  $k_1$  можно посчитать постоянным. Но тогда доброкачественность леса будет нарастать как геометрическая прогрессия, и это делает бессмысленной нашу модель. Поэтому начнем ее усложнять.

Коэффициент  $k_1$  отвечает за «прирост доброкачественности леса». Учтём, что для здорового леса обязательной чертой является наличие ярусности.

Следуя Дюрье, примем в расчет только четыре яруса. Взаимодействие ярусов должно дать вклад в доброкачественность леса вида

$$\alpha_1x \cdot \alpha_2x \cdot \alpha_3x \cdot \alpha_4x = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4x^4.$$

Каждый коэффициент  $\alpha_i > 0$  характеризует степень участия  $i$ -го яруса во взаимодействии ярусов. Если  $\alpha_i \rightarrow 0$ , то мы констатируем отсутствие  $i$ -го яруса, означающее меньшую ярусность биоценоза и, следовательно, его меньшую степень биоразнообразия, меньшую устойчивость к неблагоприятным воздействиям.

Примем, что

$$k_1 = k_0x^4 - p(x), \quad (5)$$

где  $k_0 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = const$  – «сила» взаимодействия четырех ярусов леса, а величина  $p(x)$  – это то, что мешает доброкачественности леса.

Тогда следует принять, что

$$p(x) = \underbrace{k_2}_{\text{вырубка леса, пожары}} + \underbrace{k_3x^2}_{\text{конкуренция}} - \underbrace{k_4x}_{\substack{\text{оконная динамика} \\ \text{(хорошая атмосфера)}}, \quad (6)$$

где член  $k_3x^2$  характеризует конкуренцию растений в лесу, а член  $k_4x$  допускает две интерпретации. При  $k_4 > 0$ , при первой интерпретации, имеем хороший состав атмосферы, или, при второй – действителен основной механизм смены поколений деревьев, поддерживающий специфическую мозаичность лесов и высокое биологическое разнообразие во многих типах леса, называемый «оконной динамикой». Он связан с гибелью отдельных старых деревьев или их групп, образования за счет этого «окон» в пологе древостоя и формирования в этих окнах групп молодых деревьев.

Объединяя уравнения (4)-(6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_0x^5 - k_2x - k_3x^3 + k_4x^2 + w = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{k_0}{6}x^6 + \frac{-k_3}{4}x^4 + \frac{k_4}{3}x^3 + \frac{-k_2}{2}x^2 + wx \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} V(x, l, u, v, w), \quad (8)$$

где

$$V(x, l, u, v, w) = \frac{k_0}{6}x^6 + lx^4 + ux^3 + vx^2 + wx, \quad (9)$$

$$l = -\frac{k_3}{4}, \quad u = \frac{k_4}{3}, \quad v = -\frac{k_2}{2}.$$

Отметим, что доброкачественность характеризуется неравенством  $x > 0$ ; наличие конкуренции неравенством  $l < 0$ , действенность оконной динамики неравенством  $u > 0$ ; вырубка лесов, пожары неравенством  $v < 0$ , недостаток влаги неравенством  $w < 0$ .

Функция  $V(x, l, u, v, w)$ , заданная выражением (9), описывает при изменении параметров  $l, u, v, w$  самые различные бифуркации, называемые в математической теории катастроф катастрофами типа «бабочка» [5, 6, 6, 7].

### 3. Равновесия системы, их смена и математическая теория катастроф

Равновесные системы, и это относится и к лесным экосистемам, характеризуются тем, что их строение и состав колеблются около какой-то средней точки, представляющей как бы типичное состояние растительного покрова.

Равновесие в природе на самом деле зависит от окружающей среды, а среда эта постоянно подвержена изменениям. Пожары, наводнения, колебания количества атмосферных осадков оказывают влияние на среду, в которой произрастает лес. И растения, конечно же, не могут не реагировать на эти изменения. Получается, что экосистема все время пытается либо сохранить равновесие, либо попасть в новое равновесие. Вмешательство человека – всего лишь еще один способ изменить окружающую среду и, таким образом, повлиять на направление развития экосистемы.

Экосистему можно вывести из состояния равновесия многими способами. Обычно это бывает пожар, наводнение или засуха. После такого нарушения равновесия новая экосистема сама себя восстанавливает, и этот процесс носит регулярный характер, называется *сукцессией* и повторяется в самых разных ситуациях.

Сукцессия – это последовательный ряд смены серийных (временно существующих) растительных сообществ на конкретном местообитании после выведения конкретной экосистемы из состояния равновесия [1]. «При этом конкретная экосистема возвращается в свое исходное состояние и пребывает в нем

до тех пор, пока не изменятся климат, рельеф, гидрологический режим, пока вновь не пройдет пожар или не случится какая-то другая катастрофа. И вновь начнется новая сукцессия, которая либо приведет к восстановлению исходного сообщества, либо нет. В результате сукцессии на конкретном местообитании восстанавливается исходное растительное сообщество, называемое геоботаниками климаксовым, или коренным. Коренное сообщество растений устойчиво и в данных климатических условиях не изменяется» [1].

В данной работе не ставится задача описания сукцессии, т.е. задача возврата к исходному равновесию, а описывается выведение экосистемы из равновесия и прогнозируются возможные *новые* равновесия, к которым переходит экосистема.

Для математического описания смены равновесий системы при изменении внешних (управляющих) факторов математиками создана теория элементарных катастроф. Она исходит из предположения, что поведение системы определяется некоторой потенциальной функцией  $V = V(x, u_1, \dots, u_n)$ , где  $x$  – переменная, характеризующая изучаемую систему, а  $u_1, \dots, u_n$  – внешние управляющие факторы.

Динамика изменения во времени переменной  $x(t)$  задается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V(x, u_1, \dots, u_n)}{\partial x}. \quad (10)$$

*Равновесия системы* – это такие решения  $x(t)$  уравнения (1), которые не меняются со временем (какой-то период времени), т.е.

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Но в таком случае, как видно из уравнения (1), имеем *уравнение всевозможных равновесий* системы

$$\frac{\partial V(x, u_1, \dots, u_n)}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Каждое равновесие есть решение  $x$  данного уравнения, зависящее от конкретного набора внешних управляющих факторов, т.е.  $x = x(u_1, \dots, u_n)$ .

Если меняются внешние факторы, скажем, вместо набора  $(u_1^0, \dots, u_n^0)$  переходим к набору  $(u_1^1, \dots, u_n^1)$ , то имеем смену равновесия системы – вместо равновесия  $x_0 = x(u_1, \dots, u_n)$  получаем равновесие  $x_1 = x(u_1^1, \dots, u_n^1)$ .

Естественно считать, что если слабо изменятся внешние факторы, то система почти не изменит своего состояния, т.е. практически сохранит значение характеризующей ее переменной  $x_0$  или займет равновесие, близкое к тому, что было, конечно же не отличающееся от предыдущего качественно. Однако исследования показали, что возможны такие малые изменения внешних факторов, и они происходят тогда, когда пересекают при своем изменении так называемые *бифуркационные множества*, при которых система переходит к новому равновесию, для которого ее характеристика  $x_1$  существенно отлична от предыдущей, и, следовательно, новое равновесие обладает новыми качествами.

Такие переходы были названы катастрофами, поскольку переходу к новому *устойчивому* равновесию предшествует потеря устойчивости раннего равновесия. Название было продиктовано примерами из механики, физики и кораблестроения, где такие процессы описывали реальные катастрофы (перелом балки, замерзание воды, перевертывание судна). Отсюда и название математической теории, данное ей французским математиком Рене Томом.

С точки зрения математики, как видно из уравнения (11), равновесие  $x = x(u_1, \dots, u_n)$  – это либо *точка минимума*, либо *точка максимума*, либо так называемая *точка перегиба* функции  $V = V_{(u_1, \dots, u_n)}(x) = V(x, u_1, \dots, u_n)$ . Обозначение  $V_{(u_1, \dots, u_n)}(x)$  говорит о том, что мы функцию  $V = V(x, u_1, \dots, u_n)$  рассматриваем как функцию *одной* переменной  $x$  и используем соответствующий математический аппарат, известный школьникам.

Как правило, устойчивые равновесия системы – это минимумы функции  $V = V_{(u_1, \dots, u_n)}(x)$ . На рисунках графика функции  $V = V_{(u_1, \dots, u_n)}(x)$  они изображаются ямками (соответственно максимумы – неустойчивые равновесия – изображаются вершинами горок).

Теория элементарных катастроф по самой своей природе локальна. Иначе говоря, функция  $V_{(u,v,w)}(x) = V(x, u, v, w)$  как функция  $x$  определена лишь в окрестности  $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ , и, следовательно, теория не описывает все возможные состояния равновесия. Уход системы в такие неопределяемые теорией равновесия оговаривается как переход к равновесию  $x = -\infty$  (минус бесконечность).

#### 4. Определения экологической ситуации и экологических катастроф

Катастрофы, описываемые теорией катастроф, вполне отвечают тому, что можно было бы назвать экологическими катастрофами<sup>4</sup>. Поэтому адаптируем терминологию теории катастроф к экологии.

Назовем *местной экологической ситуацией*, отвечающей набору внешних факторов  $(u_1, \dots, u_n)$ , любую из точек локального минимума функции  $V_{(u_1, \dots, u_n)}(x)$ .

Экологическая система в случае местной экологической ситуации пребывает в *равновесии*, т.е. величина  $x(t)$  не меняется со временем (управляющие факторы  $(u_1, \dots, u_n)$  зафиксированы).

*Региональной экологической ситуацией*, связанной с  $V$ , называется набор местных экологических ситуаций, предполагая и возможность равновесия  $x = -\infty$  (минус бесконечность).

Принятие значения  $x = -\infty$  означает, что наша математическая модель говорит о том, что экосистема переходит в равновесное состояние, которое не описывается с помощью предложенного уравнения ее эволюции (1) (теория локальна!).

---

<sup>4</sup>В общем смысле экологическая катастрофа означает достаточно быстрый переход системы к новому качественному равновесному состоянию.

Фактически региональная экологическая ситуация – это набор местных экологических ситуаций.

*Точкой экологической катастрофы* называется любая точка перегиба функции  $V = V_{(u_1, \dots, u_n)}(x)$ .

*Морфологией катастрофы*, или множеством катастроф, называется множество всех точек катастрофы.

Точки катастроф, которые входят в бифуркационное множество, находят, исключая  $x$ , в процессе решения системы уравнений

$$\frac{\partial V(x, u_1, \dots, u_n)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V(x, u_1, \dots, u_n)}{\partial x^2} = 0.$$

Для конкретного набора внешних факторов у функции  $V = V_{(u_1, \dots, u_n)}(x)$  может быть несколько точек минимумов. Скажем, это точки  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . В каком из этих равновесий находится система? Для этого придуманы различные правила.

*Правилом* называется способ, по которому мы выбираем равновесия, т.е. минимумы функции  $V = V_{(u_1, \dots, u_n)}(x)$  для некоторой региональной экологической ситуации, связанной с  $V$ .

Рассмотрим два основных правила.

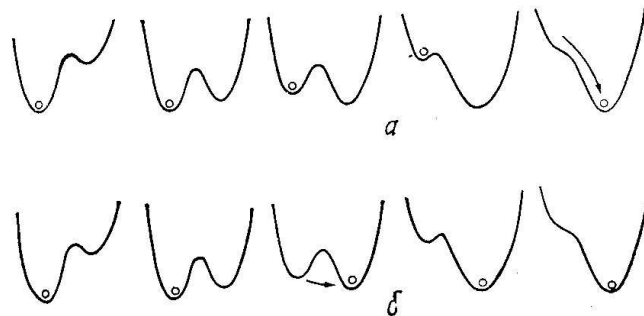


Рис. 1. Вверху показано действие правила максимального промедления, а на нижних рисунках – правило Максвелла.

*Правило максимального промедления* предписывает состоянию оставаться в минимуме при изменении факторов до тех пор, пока он существует (рис. 1, вверху).

В момент, когда происходит исчезновение старого минимума и становится необходимым переход в новый, происходит экологическая катастрофа.

*Правило Максвелла* предписывает взять в качестве равновесия системы такую точку минимума, в которой функция  $V = V_{(u_1, \dots, u_n)}(x)$  достигает наименьшего значения (рис. 1, внизу).

Поскольку одним из значений этого минимума может оказаться  $-\infty$ , правилом Максвелла лучше пользоваться тогда, когда  $V$  имеет конечные минимумы. Ясно, что катастрофы возникают тогда, когда  $V = V_{(u_1, \dots, u_n)}(x)$  достигает абсолютного минимума в двух различных местах.

В случае правила максимального промедления катастрофе, т.е. резкой смене равновесия отвечает качественное изменение формы потенциальной функции  $V = V_{(u_1, \dots, u_n)}(x)$ . В случае правила Максвелла резкая смена равновесия происходит без качественного изменения формы функции  $V = V_{(u_1, \dots, u_n)}(x)$ . С точки зрения теории катастроф в случае правила Максвелла можно говорить о некатастрофической смене равновесия. Хотя с точки зрения экологии это скорее всего самая настоящая катастрофа. Катастрофы происходят в любом смысле и вне зависимости от принятого правила, если, изменяясь, управляющие внешние факторы пересекают бифуркационное множество.

Изучим все сказанное в нашем конкретном случае, когда функция  $V$  имеет вид (9).

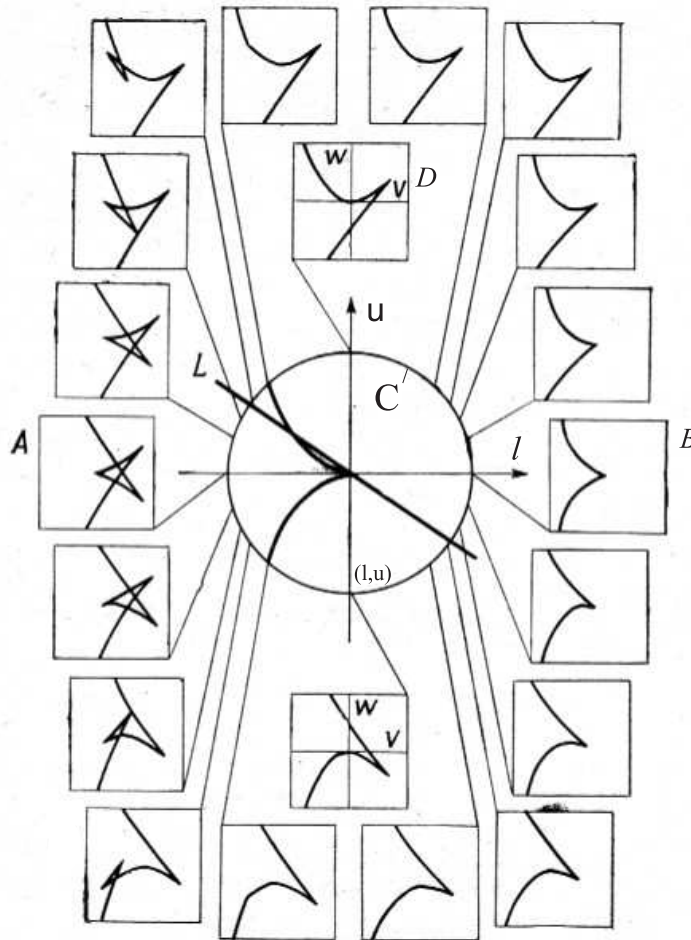


Рис. 2. Части бифуркационного множества  $B_V$ , лежащие в плоскостях  $vw$ , когда фиксируется точка  $(l, u) \in C$  на окружности  $C$ . Кривая с точкой возврата в плоскости  $lu$  – это линия ласточкиных хвостов, т.е. геометрическое место точек, в которых происходит катастрофа «ласточкин хвост» [6].

### 5. Катастрофы в экологии леса типа «бабочка»

Для катастрофы «бабочка» потенциал

$$V(x, u, v) = x^6 + lx^4 + ux^3 + vx^2 + wx.$$

Рассмотрим множество

$$M_V = \{(x, l, u, v, w) : \frac{\partial}{\partial x}V = 6x^5 + 4lx^3 + 3ux^2 + 2vx + w = 0\}.$$

Оно состоит из максимумов, минимумов и точек перегиба функции  $V_{(l,u,v,w)}(x)$ . Все они отвечают равновесию в состоянии изучаемой лесной экосистемы.

Множество

$$S_V = \{(x, l, u, v, w) \in M_V : \frac{\partial^2}{\partial x^2}V = 30x^4 + 12lx^2 + 6ux + 2v = 0\}$$

состоит из точек перегиба, которые принимаются, когда точка  $(l, u, v, w)$  принадлежит так называемому *бифуркационному множеству*:

$$B_V = \{(l, u, v, w) \in prS_V : \exists x(6x^5 + 4lx^3 + 3ux^2 + 2vx + w = 0 \ \& \ 30x^4 + 12lx^2 + 6ux + 2v = 0)\}.$$

Это множество изображается в качестве поверхности в четырехмерном пространстве переменных  $l, u, v, w$ . Различные его сечения в плоскости  $vw$  при фиксированных  $l, u$  даны на рис. 2.

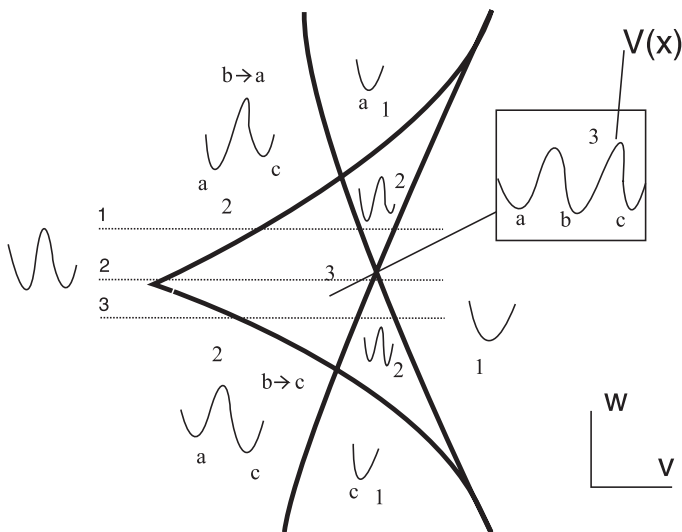


Рис. 3. Катастрофические смены экологических ситуаций при фиксированных  $l < 0, u = 0$  в случае картинки А из рис. 2. Дана динамика смены равновесий у функции  $V_{(l,u,v,w)}(x)$  в сечении  $l < 0, u = 0$ . При переходе через линии  $B_V$  на плоскости  $vw$  рождается или умирает равновесие.

### 5.1. Катастрофы при вырубке лесов, пожарах. Нет мозаичности, есть сильная конкуренция. Влажность любая

Пусть дана ситуация, данная на  $A$  из рис. 3. Тогда  $u = 0$  (нет мозаичности леса),  $l < 0$  (есть сильная конкуренция). Влажность почвы любая.

Рассмотрим случай, когда  $w = const$ , а внешний фактор  $v$  уменьшается от значения  $v > 0$  (поддержание леса в порядке) через  $v = 0$  до  $v < 0$  (идет вырубка лесов, пожары) вдоль горизонтальных линий на рис. 3, пересекающих область с цифрой 3. Тогда единственное устойчивое равновесие сменяется одним из трех возможных; в свою очередь, одно из них вскоре исчезает при дальнейшем уменьшении  $v$ , и лесная экосистема наконец-то перейдет к новому равновесию, причем либо одному из двух альтернативных, либо к одному конкретному в зависимости от степени влажности почвы (рис. 3).

### 5.2. Катастрофы при вырубке лесов, пожарах. Нет мозаичности, нет сильной конкуренции. Влажность любая

Пусть дана ситуация, данная на  $B$  из рис. 4. Тогда  $u = 0$  (нет мозаичности леса),  $l > 0$  (отсутствует сильная конкуренция). Влажность почвы любая. Рассмотрим случай, когда  $w = const$ , а внешний фактор  $v$  уменьшается от значения  $v > 0$  (поддержание леса в порядке) через  $v = 0$  до  $v < 0$  (идет вырубка лесов, пожары) вдоль горизонтальных линий 1, 2, 3 на рис. 4, пересекающих линию  $B_V$ . Тогда единственное устойчивое равновесие сменяется одним из двух возможных, и лесная экосистема наконец-то перейдет к новому равновесию, причем либо одному из двух альтернативных, либо к одному конкретному в зависимости от степени влажности почвы (рис. 4).

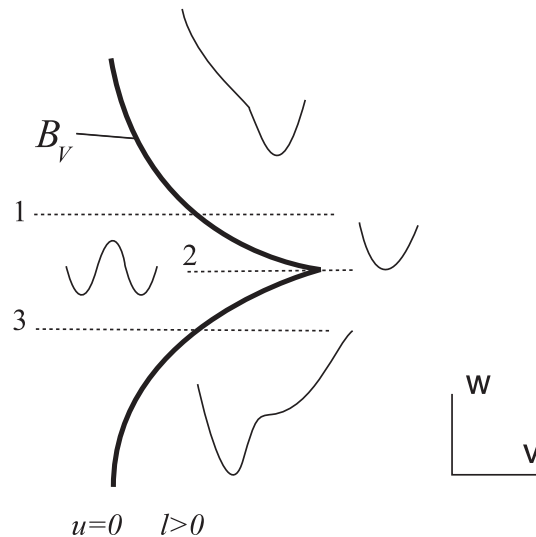


Рис. 4. Катастрофические смены экологических ситуаций при фиксированных  $l > 0, u = 0$  в случае картинки  $B$  из рис. 2. Дана динамика исчезновения минимумов у функции  $V(l, u, v, w)(x)$ . Возможно не более двух равновесий.



### 5.3. Катастрофы при вырубке лесов, пожарах. Есть чистая хорошая атмосфера, нет сильной конкуренции. Влажность любая

Дана ситуация  $D$  из рис. 5. Тогда  $u > 0$  (чистая хорошая атмосфера),  $l = 0$  (отсутствует сильная конкуренция). Влажность почвы любая. Рассмотрим случай, когда  $w = const$ , а внешний фактор  $v$  уменьшается от значения  $v > 0$  (поддержание леса в порядке) через  $v = 0$  до  $v < 0$  (идет вырубку лесов, пожары) вдоль горизонтальных линий на рис. 5, пересекающих линию  $B_V$ , например, по оси  $v$ . Тогда единственное устойчивое равновесие сменяется одним из двух возможных и лесная экосистема наконец-то перейдет к новому равновесию, причем либо одному из двух альтернативных, либо к одному конкретному в зависимости от степени влажности почвы (рис. 5).

Если же  $v = const < 0$  (пожары) и идет засуха ( $w$  уменьшается от 0 до очень маленького  $w < 0$  вдоль линии 1 (рис. 5), то два альтернативных равновесия сменяются одним – лес после засухи и пожаров.

Если  $v = const > 0$  (нет пожаров) и начинается и нарастает засуха ( $w$  уменьшается от  $w > 0$  до очень маленького  $w < 0$  вдоль линии 2 (рис. 5), то одно равновесие заменяется на одно из двух альтернативных, а затем остается только одно – лес после засухи без пожаров.

Если  $v = const > 0$  (нет пожаров) и начинается и нарастает засуха ( $w$  уменьшается от  $w > 0$  до очень маленького  $w < 0$  вдоль линии 3 (рис. 5), то равновесие остается единственным, меняется только доброкачественность леса.

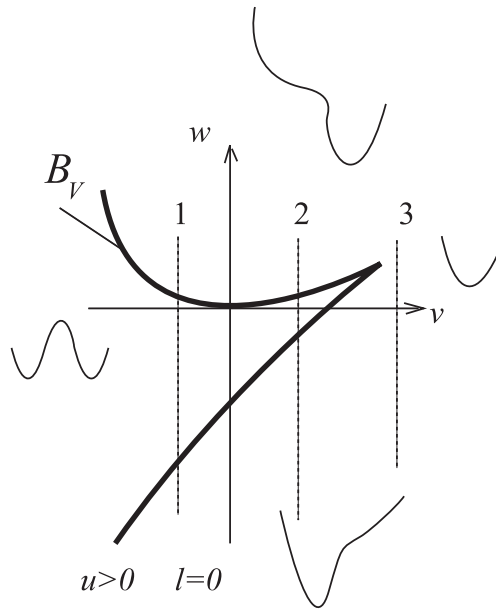


Рис. 5. Катастрофические смены экологических ситуаций при фиксированных  $l = 0, u > 0$  в случае картинке  $D$  из рис. 2. Дана динамика исчезновения минимумов у функции  $V_{(l,u,v,w)}(x)$ . Возможно не более двух равновесий.

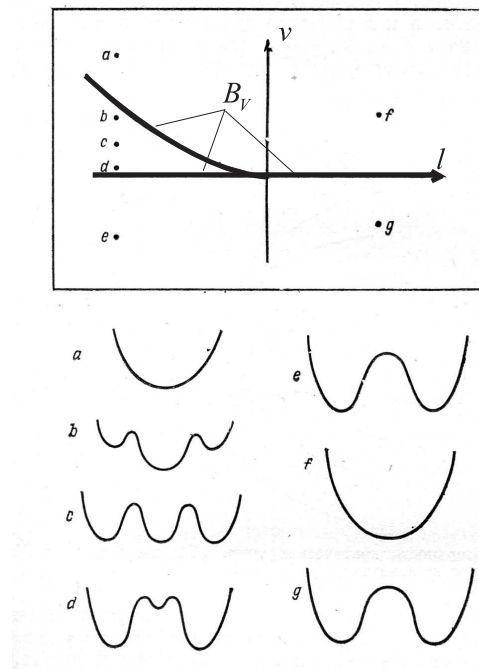


Рис. 6. Катастрофическая смена равновесий в случае потенциала  $V_{(l,0,v,0)}(x)$  при изменении фактора вырубki лесов (пожаров). Если конкуренция действительна ( $l < 0$ ), то вырубка леса (пожары), т.е. уменьшение  $v$  от  $V > 0$  к  $v < 0$  заставляет единственное устойчивое равновесие скачком поменять на одно из трех возможных в зависимости от принятого правила (a,b,c,d). При отсутствии конкуренции ситуация принципиально не меняется (e,f,g) (рис. из [6, с.197]).

#### 5.4. Катастрофы вырубki лесов и пожаров. Влажность $w = 0$

Пусть  $u = w = 0$ , т.е. не действительна оконная динамика (состояние атмосферы нейтральное) и нормальная влажность почвы.

Тогда мы будем наблюдать катастрофическую смену равновесий в случае потенциала  $V_{(l,0,v,0)}(x)$  при изменении фактора вырубki лесов (пожаров).

Если конкуренция действительна ( $l < 0$ ), то вырубка леса (пожары), т.е. уменьшение  $v$  от  $v > 0$  к  $v < 0$  заставляет единственное устойчивое равновесие скачком поменять на одно из трех возможных в зависимости от принятого правила (a,b,c,d) (см. рис. 6).

При отсутствии конкуренции ситуация принципиально не меняется (e,f,g) (см. рис. 6).

#### 5.5. Правило Максвелла: некатастрофическая смена равновесия при вымокании леса

Пусть имеет место случай  $u = 0$ , т.е. когда не наблюдается действие оконной динамики.

Рассмотрим четыре прямые 1, 2, 3, 4, заданные соответственно уравнениями:

$$1 = \{l > 0, u = 0, v = 0, w - \text{меняется}\},$$

$$i = \{l_i < 0, u = 0, v_i = (3/2)l_i^2, w - \text{меняется}\}, \quad (i = 2, 3, 4).$$

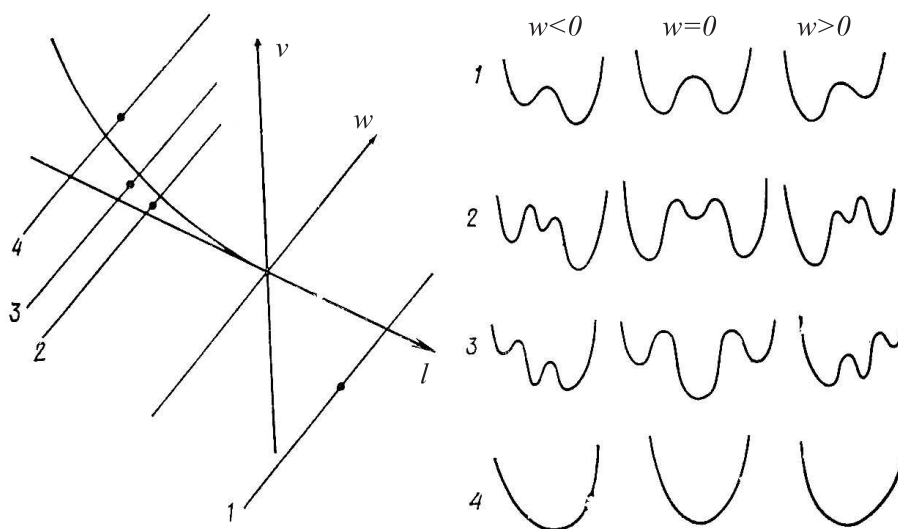


Рис. 7. Дана смена равновесий в случае потенциала  $V_{(l,0,v,w)}(x)$  при возрастании влаги (избыток влаги, вымокание леса) в почве леса  $w$ . По правилу Максвелла экосистема должна переходить к новому равновесию с меньшей доброкачественностью (рис. из [6, с.201]).

Вдоль прямых 1,2,3,4 лес поддерживается в порядке (нет вырубki, пожаров), поскольку  $v > 0$ . См. рис. 7 (слева).

Мы видим, что при возрастании избытка влаги в почве потенциальная функция  $V_{(l,0,v,w)}(x)$  экосистемы начинает меняться так, что при использовании нами правила Максвелла происходит смена равновесия и экосистема занимает состояние с меньшей доброкачественностью леса (рис. 7, справа).

Если, однако, пользоваться правилом максимального промедления, то смены равновесия мы не наблюдаем. Такая неадекватность правил реальим эволюции экологических систем демонстрирует скорее определенную незавершенность теории катастроф как совершенной математической теории, чем ее непригодность.

## 6. Катастрофы в плоскости «атмосфера (освещенность) $u$ – антропогенный фактор $v$ »

На рис. 2 приведена структура бифуркационного множества в плоскости  $(v, w)$  в зависимости от выбора конкретных значений конкуренции  $l$  и антропогенного фактора  $u$ .

На рис. 8, 9 показана структура бифуркационного множества в плоскости «атмосфера (освещенность)  $u$  – пожары (вырубка)  $v$ » в зависимости от выбора значений конкуренции  $l$  и влажности  $w$ .

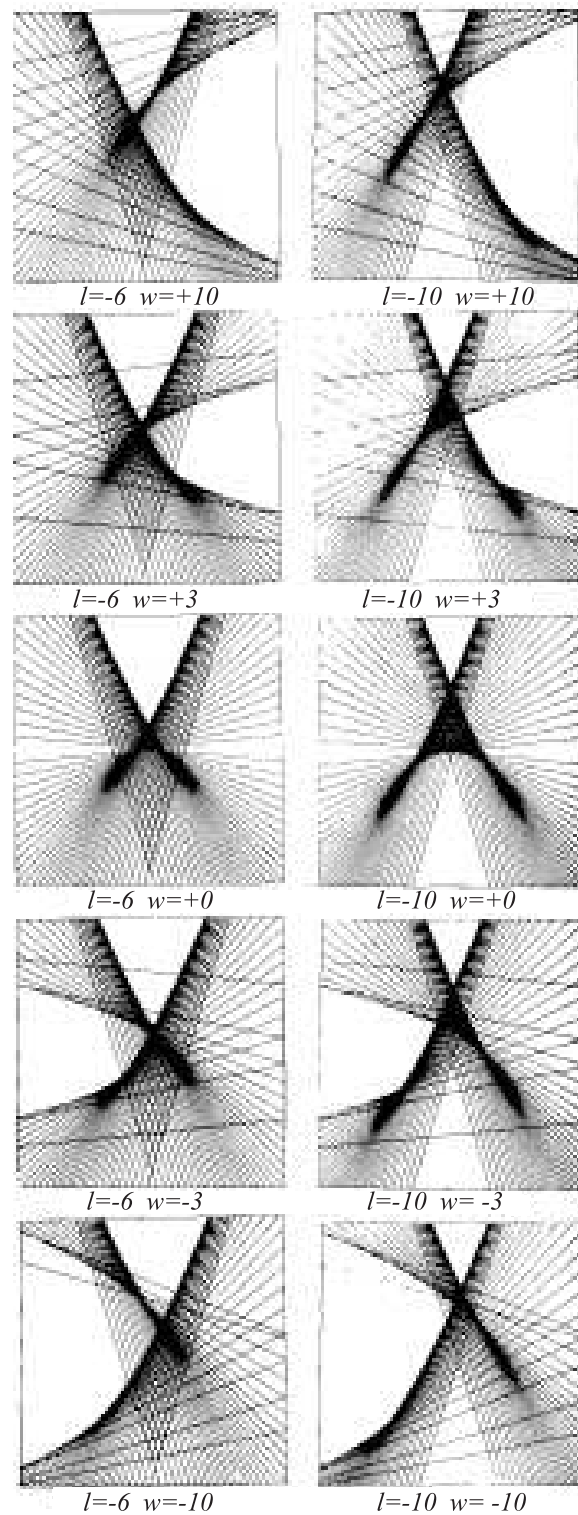


Рис. 8. Бифуркационное множество в плоскости «атмосфера (освещенность)  $u$  – пожары (вырубка)  $v$ » в зависимости от значения конкуренции  $l$  (от сильной конкуренции  $l = -6, -10$ ) и влажности  $w$ . Линии, принадлежащие бифуркационному множеству в плоскости  $(u, v)$ , – это огибающие семейств прямых линий, изображенных на рисунке [9, p.24].

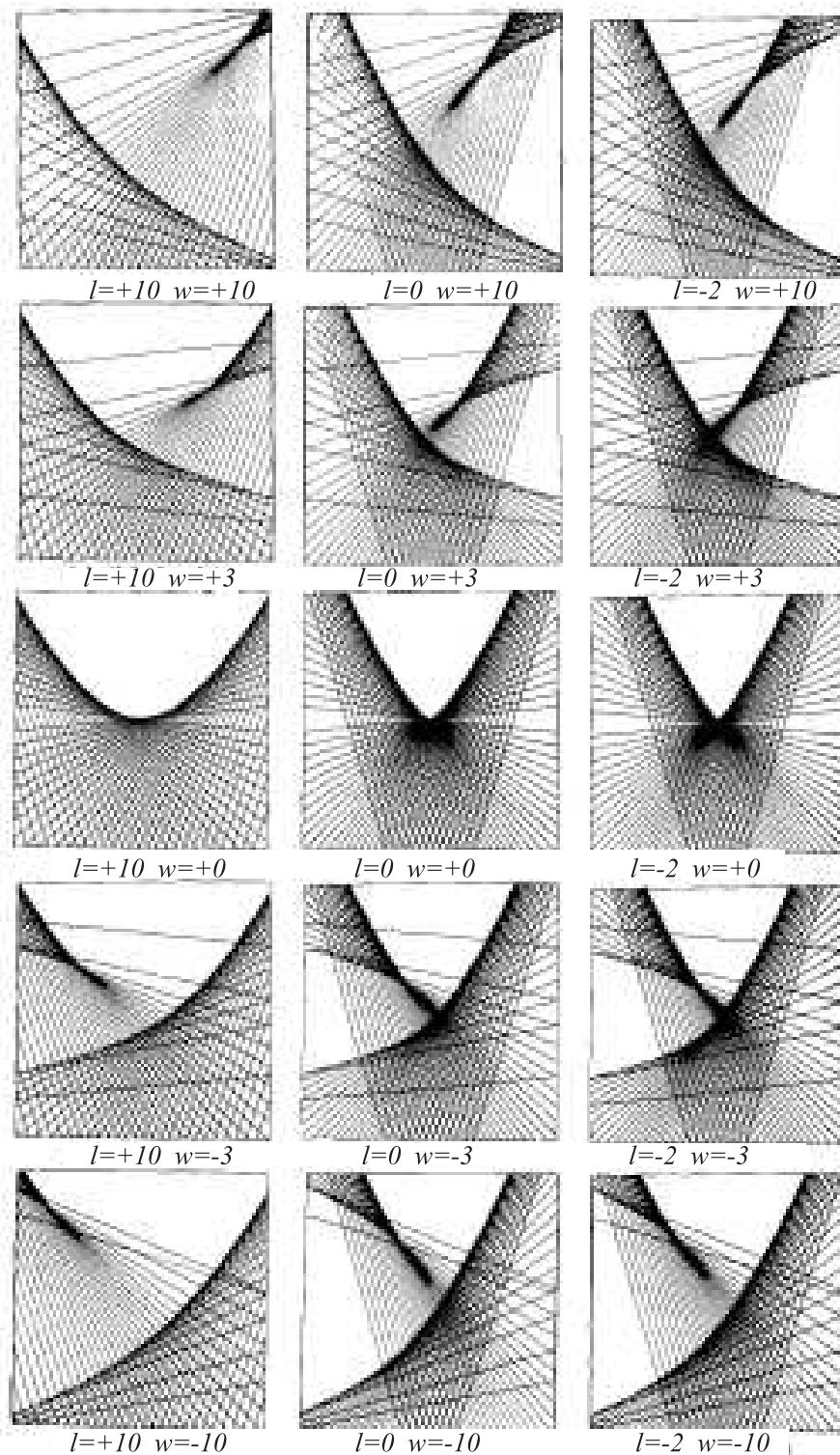


Рис. 9. Бифуркационное множество в плоскости «атмосфера (освещенность)  $u$  – пожары (вырубка)  $v$ » в зависимости от значения конкуренции  $l$  (от отсутствия конкуренции  $l = +10$  до ее наличия  $l = -2$ ) и влажности  $w$ . Линии, принадлежащие бифуркационному множеству в плоскости  $(u, v)$ , – это огибающие семейств прямых линий, изображенных на рисунке [9, p.24].

## 7. Структурная устойчивость модели

Описание экологии леса, предложенное в данной статье, обладает важным достоинством – модель структурно устойчива. Это означает, что найденная нами потенциальная функция (9)

$$V(x, l, u, v, w) = \frac{k_0}{6}x^6 + lx^4 + ux^3 + vx^2 + wx, \quad (12)$$

в случае ее возмущения (малого шевеления) вида

$$V(x, l, u, v, w) \rightarrow V(x, l, u, v, w) + \delta V(x, l, u, v, w)$$

может быть возвращена к выражению внешне такому же<sup>5</sup>, как (12), если совершить следующие преобразования координаты  $x$  и параметров  $l, u, v, w$ :

$$x \rightarrow \bar{x} = \bar{x}(x, l, u, v, w),$$

$$(l, u, v, w) \rightarrow (\bar{l}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \phi(l, u, v, w)$$

и прибавить к возмущенному потенциалу некоторую функцию  $\psi(l, u, v, w)$  [6, 6, 7].

Иначе говоря, наша модель устойчива по отношению к изменениям потенциальной функции, которые могут проявляться в форме пожеланий внести уточнения в вид потенциальной функции, или в форме высказываний о том, что в реальности лес не может быть описан некоторой выбранной раз и навсегда конкретной математической формулой.

Наличие структурной устойчивости у модели говорит о том, что ничего качественно нового в описании экологических ситуаций и экологических катастроф возмущенная модель не дает.

Наконец, если бы мы заявили о том, что нужно учесть в описании леса еще какой-либо один подъярус как ярус, то имели бы вместо (12) функцию

$$V(x, l, u, v, w) = \frac{k_0}{7}x^7 + lx^4 + ux^3 + vx^2 + wx, \quad (13)$$

которая не обладает свойством структурной устойчивости. Это, с одной стороны, говорит о том, что модель с выбором четырех ярусов не случайна, а с другой – что учёт подъярусов требует достаточно радикального изменения всей модели за счёт добавления новых управляющих параметров.

Тем не менее забыть о структурной устойчивости заставляет то, что часто при выделении ярусов выделяют два (или три) яруса деревьев, один или два яруса кустарников, три яруса трав, один ярус напочвенного покрова. Всего получаем семь (или девять) ярусов.

Если считать, что ярусов семь, т.е. особо выделять три яруса трав и ярус напочвенного покрова, то имеем функцию

$$V(x, l, u, v, w) = \frac{k_0}{8}x^8 + lx^4 + ux^3 + vx^2 + wx.$$

<sup>5</sup>С точностью до написания черточек над  $x, l, u, v, w$ .

Это частный случай катастрофы типа «звезда» [9]:

$$V(x, p, q, l, u, v, w) = \frac{k_0}{8}x^8 + px^6 + qx^5 + lx^4 + ux^3 + vx^2 + wx. \quad (14)$$

Она описывает, вообще говоря, семь равновесных состояний сразу, из которых не более четырех являются устойчивыми (наличие сразу четырех локальных минимумов у функции  $V$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Москалюк, Т.А. Курс лекций по биогеоценологии [Электронный ресурс] / Т.А. Москалюк. – Режим доступа: [http://www.botsad.ru/p\\_papers.htm](http://www.botsad.ru/p_papers.htm) (12.05.2009).
2. Грозовая активность как фактор пожарной опасности [Электронный ресурс] // Лесной эксперт. №4 (41), июнь 2007. – Режим доступа: <http://www.lesnoyexpert.ru/>
3. Кондратьев, К.Я. Лесные пожары как компонент природной экодинамики [Электронный ресурс] / К.Я. Кондратьев, Ал.А. Григорьев. – Режим доступа: [http://www.nwicrc.ru/documents/Forest\\_fire-rus.DOC](http://www.nwicrc.ru/documents/Forest_fire-rus.DOC) (12.05.2009).
4. Гуц, А.К. Математическая социология / А.К. Гуц, Л.А. Паутова, Ю.В. Фролова. – Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2003. – 192 с.
5. Гуц, А.К. Математические методы в социологии / А.К. Гуц, Ю.В. Фролова. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 216 с.
6. Брёкер, Т. Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Брёкер, Л. Ландер. – М.: Мир, 1977.
7. Постон, Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт. – М.: Мир, 1980.
8. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. – М.: Мир, 1984.
9. Woodcock, A.. A geometrical study of the elementary catastrophes / A. Woodcock, T. Poston // Lectures Notes in Math., N.373. – Springer, 1974.