УДК 530.12 : 531.51

А. К. ГУЦ

НОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА — ДИРАКА

Найдено новое решение уравнений Эйнштейна — Дирака, описывающих динамику самогравитирующего нейтринного поля. Гравитационное поле является волновым.

Динамика самогравитирующей спинорной материи в рамках общей теории относительности (ОТО) описывается системой уравнений Эйнштейна — Дирака ([1], с. 142):

$$R_{i\kappa} - \frac{1}{2} g_{i\kappa} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{i\kappa}, \tag{1}$$

$$i\hbar\gamma^{\kappa} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^{\kappa}} - \Gamma_{\kappa}\psi \right) - mc\psi = 0, \tag{2}$$

где ψ — биспинор,

$$T_{i\kappa} = \frac{i\hbar c}{4} \left\{ \psi^* \gamma^{(0)} \gamma_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^{\kappa}} - \Gamma_{\kappa}\psi \right) - \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^{\kappa}} \gamma^{(0)} + \psi^* \gamma^{(0)} \Gamma_{\kappa} \right) \gamma_i \psi + \right.$$

$$\left. + \psi^* \gamma^{(0)} \gamma_{\kappa} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^{i}} - \Gamma_{i}\psi \right) - \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^{i}} \gamma^{(0)} + \psi^* \gamma^{(0)} \Gamma_{i} \right) \gamma_{\kappa} \psi \right\} - \tag{3}$$

тензор энергии-импульса спинорного поля (символ * у ψ обозначает эрмитово-сопряженную величину) ([2], с. 381).

Далее

$$\Gamma_{\kappa} = \frac{1}{4} g_{ml} \left(\frac{\partial \lambda_r^{(s)}}{\partial x^{\kappa}} \lambda^l_{(s)} - \Gamma^l_{r\kappa} \right) s^{mr};$$

$$s^{mr} = \frac{1}{2} (\gamma^m \gamma^r - \gamma^r \gamma^m); \quad \gamma^{\kappa} \equiv \lambda^{\kappa}_{(i)} \gamma^{(i)}, \tag{4}$$

где $\lambda^{\kappa}_{(i)}$ — i-й вектор тетрады; $\gamma^{(i)}$ — матрицы Дирака.

Отметим, что малые латинские буквы в качестве индексов принимают значения 0, 1, 2, 3, а греческие — 1, 2, 3.

Изучение решений уравнений Эйнштейна — Дирака позволит со временем дать ответ на вопросы: 1) в состоянии ли более широкое представление о структуре материи, учитывающее понятие о внутренних степенях свободы (спин)среды, изменить проблему сингулярностей ([1], с. 133); 2) возможно ли геометризировать нейтринные поля в духе идей Уилера — Райнича.

В связи с этими вопросами получение частных решений уравнений Эйнштейна — Дирака приобретает дополнительный интерес. Как известно, решение уравнений (1), (2) представляет собой крайне тяжелую задачу и целиком зависит от удачного выбора метрики $g_{i\kappa}$. При этом надо помнить, что метрика $g_{i\kappa}$ определяет геометрию пространства-времени и, следовательно, ее нельзя брать произвольно — необходимо, чтобы $g_{i\kappa}$ отвечала вполне определенной физической задаче, т. е. допускала физическую интерпретацию [1, 3, 4, 5].

§ 1. Гравитационное излучение нейтринного потока

Мы будем рассматривать лишь нейтринные поля, т. е. в уравнении (2) примем $m = 0$. Предположим, что нейтринное поле является плоским и распространяется в положительном направлении оси x, а создаваемое им гравитационное поле является волновым. Поскольку метрика g_{ik} при этом должна описывать поле плоских гравитационных волн, распространяющихся также вдоль оси x, то ее удобно взять в следующем виде ([6], с. 292):

$$ds^2 = 2dx^0 dx^1 - \exp[2P(x^0)]\, dx^{2^2} - \exp[2Q(x^0)]\, dx^{3^2}, \qquad (5)$$

где координаты x^0, x^1, x^2, x^3 связаны с координатами x, y, z и временем t соотношениями

$$x^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct - x); \quad x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct + x); \quad x^2 = y; \quad x^3 = z.$$

Мы выбираем следующую тетраду:

$$\lambda^i_{(0)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right); \quad \lambda^i_{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right);$$

$$\lambda^i_{(2)} = (0, 0, e^{-P}, 0); \quad \lambda^i_{(3)} = (0, 0, 0, e^{-Q}) \qquad (6)$$

и γ — матрицы Дирака

$$\gamma^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ -\sigma_\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полагаем, что ψ зависит лишь от x^0 и

$$\psi = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Производя несложные вычисления по формулам (3), (4), получаем (штрих означает дифференцирование по x^0):

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} P' e^P \begin{pmatrix} -i\sigma_3 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & -i\sigma_3 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} Q' e^Q \begin{pmatrix} i\sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & i\sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$T_{00} = \frac{i\hbar c}{2\sqrt{2}} \{(u_0^* - u_3^*)(u_0' - u_3') + (u_1^* - u_2^*)(u_1' - u_2') - [(u_0^*)' - (u_3^*)'] \times$$

$$\times (u_0 - u_3) - [(u_1^*)' - (u_2^*)'](u_1 - u_2)\};$$

$$T_{11} = \frac{i\hbar c}{2\sqrt{2}} \{(u_0^* + u_3^*)(u_0' + u_3') + (u_1^* + u_2^*)(u_1' + u_2') -$$

$$- [(u_0^*)' + (u_3^*)'](u_0 + u_3) - [(u_1^*)' + (u_2^*)'](u_1 + u_2)\};$$

$$T_{02} = -\frac{\hbar c}{4}\left\{\frac{1}{2} P' e^P [-(u_0^* - u_3^*)(u_0 + u_3) + (u_1^* - u_2^*)(u_1 + u_2) -\right.$$

$$- (u_0^* + u_3^*)(u_0 - u_3) + (u_1^* + u_2^*)(u_1 - u_2)] +$$

$$+ e^P [u_0^* u_3' - u_1^* u_2' + u_2^* u_1' - u_3^* u_0' - (u_0^*)' u_3 + (u_1^*)' u_2 - (u_2^*)' u_1 + $$
$$+ (u_3^*)' u_0]\};$$

$$T_{03} = \frac{i\hbar c}{4}\left\{\frac{1}{2} Q' e^Q [(u_0^* - u_3^*)(u_1 + u_2) - (u_1^* - u_2^*)(u_0 + u_3) + \right.$$
$$+ (u_0^* + u_3^*)(u_1 - u_2) - (u_1^* + u_2^*)(u_0 - u_3)] -$$
$$- e^Q [u_0^* u_2' - u_1^* u_3' - u_3^* u_1' - (u_0^*)' u_2 + (u_1^*)' u_3 - (u_2^*)' u_0 + (u_3^*)' u_1]\};$$

$$T_{23} = \frac{\hbar c}{4\sqrt{2}}(Q' - P') e^{P+Q} \cdot [(u_0^* + u_3^*)(u_1 + u_2) + (u_1^* + u_2^*)(u_0 + u_3)].$$

Система уравнений Эйнштейна—Дирака (1), (2) примет вид

$$\left.\begin{aligned} & -R_{00} \equiv P'' + Q'' + (P')^2 + (Q')^2 = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00}, \\ & T_{0\alpha} \equiv 0, \\ & T_{\alpha\beta} \equiv 0, \\ & 2u_0' + u_3' - (P' + Q')(u_0 + u_3) = 0, \\ & 2u_1' + u_2' - (P' + Q')(u_1 + u_2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

В общем случае решение системы (7) не существует. Однако при дополнительном предположении о виде волновой функции ψ система (7) сводится к одному единственному уравнению. Предположим, что биспинор ψ удовлетворяет условиям

$$u_0 + u_3 = 0; \quad u_1 + u_2 = 0 \text{ и } u_0 = A + iB; \quad u_1 = C + iD. \qquad (8)$$

Отсюда видно, что обращаются в нуль компоненты $T_{0\alpha}$, $T_{\alpha\beta}$ и, значит, (7) сводится к одному дифференциальному нелинейному уравнению:

$$P'' + Q'' + (P')^2 + (Q')^2 = \frac{1}{2} \varkappa [(AB' - A'B) + (CD' - C'D)], \qquad (9)$$

где
$$\varkappa = \frac{32\sqrt{\pi}\, G\hbar}{c^3}.$$

Если нам известна волновая функция ψ, то соответствующее нейтринному потоку гравитационное поле g_{ik} находится посредством интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения (9).

Функции P и Q определяют два различных состояния поляризации гравитационной волны, поэтому, задав Q, мы из (9) найдем P, т. е. определим гравитационную волну с вполне определенной поляризацией. Действительно, пусть Q нам известна. Положим $P = \ln y\,(x_0)$. Тогда (9) сводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$y'' = F(x^0) \cdot y, \qquad (10)$$

где
$$F(x^0) = \varkappa [(AB' - A'B) + (CD' - C'D)] - (Q')^2 - Q''.$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений ([7], с. 75—76), задача Коши для (10) однозначно разрешима (правда, разрешимость в квадратурах возможна лишь в частных случаях) для любой непрерывной функции $F(x^0)$. Таким образом, мы получаем целый класс решений уравнений Эйнштейна — Дирака (1), (2).

Метрика (5) всегда может быть интерпретирована как гравитационное излучение нейтринного потока, распространяющегося вдоль оси x. В самом деле, если $g_{i\kappa}$ не соответствует пустому 3-пространству, то $P'' + Q'' + (P') + (Q')^2 \not\equiv 0$. Значит, задав функции P и Q, мы из уравнения (9) можем найти соответствующую волновую функцию ψ.

Как известно, нейтрино обладает строго определенной продольной поляризацией (нейтрино имеет спиральность, равную — 1, антинейтрино + 1). Математически это выражается в том, что волновая функция ψ допустимых состояний должна удовлетворять условию ([2], с. 394):

$$(I - i\gamma_5)\psi = 0, \tag{11}$$

где

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!\sqrt{-g}}\varepsilon^{i\kappa lm}\gamma_i\gamma_\kappa\gamma_l\gamma_m.$$

Так как (11) эквивалентно равенствам

$$u_0 + u_2 = 0, \quad u_1 + u_3 = 0, \tag{12}$$

то рассматриваемые нами волновые функции (8) являются допустимыми; само же условие (8) фиксирует знак энергии, т. е. определяет частицу либо античастицу.

Из (8), (12) следует, что $A = C$, $B = D$, т. е. (9) принимает вид:

$$P'' + Q'' + (P')^2 + (Q')^2 = \varkappa(AB' - A'B). \tag{13}$$

§ 2. Решения специального вида

Уравнения (13), (10) тесно связаны с уравнением Риккати, общее решение которого не выражается в квадратурах. Следовательно, для того, чтобы указать класс решений уравнения (13), мы должны как-то заранее задавать функцию Q (т. е. фиксировать поляризацию гравитационной волны) и волновую функцию ψ или функции A и B. При этом будем получать конкретные дифференциальные уравнения, сведения о которых собраны в [8]. Тем не менее, можно указать целые классы различных решений уравнения (13). Некоторые из них мы сейчас укажем.

1. Предположим, что мы имеем дело с единственной частицей (античастицей), находящейся в состоянии с определенным импульсом. Тогда, как следует из (8), (12), ее волновая функция определяется однозначно и имеет вид

$$\psi(x^0) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{ix^0}. \tag{14}$$

Примем $Q = P$ и $P = \ln y(x^0)$. Тогда, подставляя (14) в (13), получим

$$y'' = y, \text{ т. е. } P(x^0) = Q(x^0) = \ln(C_1 e^{x^0} + C_2 e^{-x^0}).$$

2. Предположим, что волновая функция $\psi(x^0)$ нам известна. Допустим, $P'' = -Q''$ или

$$Q(x^0) = -P(x^0) + c_1 x^0 + c_2. \tag{15}$$

Тогда (13) примет вид

$$(P')^2 + (-P' + c_1)^2 = \varkappa(AB' - A'B). \tag{16}$$

Из (16) получаем следующее решение:

$$P(x^0) = \frac{c_1}{2}x^0 \pm \frac{1}{2}\int\sqrt{2\varkappa(AB' - A'B) - c_1^2}\,dx^0 + c_3, \tag{17}$$

Гравитационная волна (15), (17) является достаточно полным решением поставленной в этой статье задачи, поскольку по произвольной волновой функции ψ мы нашли порождаемое ею поле тяготения.

3. Пусть теперь функции A и B таковы, что $AB = AB$. Это означает, что тензор энергии-импульса нейтринного поля равен тождественно нулю. При этом, однако, плотность нейтринного тока отлична от нуля:

$$j^{(\kappa)} = \{4(A^2 + B^2),\ -4(A^2 + B^2),\ 0,\ 0\},$$

где

$$j^{(\kappa)} = \lambda_i^{(\kappa)} \psi^+ \gamma^i \psi.$$

В подобном случае говорят о нейтринном духе [3, 4]. Поле тяготения при этом может иметь тип N по Петрову (например, пространство максимальной подвижности T_2). В [3] поле с плоской симметрией и нейтринным духом в отличие от нашего принадлежит к типу D, т. е. не имеет волновой структуры. Нейтринные духи возможны и в плоском пространстве-времени. Это следует из того, что в наших рассуждениях функции P и Q могут быть константами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Гололобова, В. Г. Кречет, В. Г. Лапчинский. Теория относительности и гравитация. М., «Наука», 1976. [2] Д. Бриль, Дж. Уилер. Новейшие проблемы гравитации. М., ИЛ, 1961. [3] D. Talmadge, J. Ray. Phys. Rev., **D5**, № 2, 331—333, 1974. [4] D. Talmadge, J. Ray. J. Math. Phys., **16**, № 1, 75—79, 1975. [5] Д. Д. Иваненко, В. Г. Кречет, В. Г. Лапчинский. Изв. вузов СССР, Физика, № 12, 59—62, 1973. [6] Дж. Синг. Общая теория относительности. М., ИЛ, 1963. [7] В. И. Смирнов. Курс высшей математики, **2**, М., «Наука», 1974. [8] Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1976.

Омский госуниверситет

Поступила в редакцию
20 июня 1978 г.,
в окончательном варианте —
29 января 1979 г.