ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1975 МАТЕМАТИКА № 4 (155)

УДК 513.8

А. К. Гуц

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В данной статье приводятся примеры семейств множеств в n-мерном пространстве Лобачевского $Л^n (n \geqslant 2)$, инвариантность которых относительно биективных отображений определяет эти отображения, как движения в пространстве. Например, можно рассматривать $n+1$ семейство прямых и отображение, переводящее прямые этих семейств в прямые этих же семейств так, что сохраняются углы между прямыми. Можно брать в качестве семейства множеств и сферы. Аналогичные результаты верны и в евклидовой геометрии, однако выясняются некоторые различия, относящиеся к требованию непрерывности отображений.

Пусть $\{l_X : X \in Л^n\}$ — семейство прямых в пространстве $Л^n$, такое, что для всякой точки X прямая l_X содержит точку X и параллельна прямой l_O, где $O \in Л^n$ (в данном направлении на прямой l_O).

Далее все объекты в модели Пуанкаре пространства Лобачевского обозначаем теми же символами, что и отвечающие им объекты в самом пространстве $Л^n$, но со знаком $\frown$ сверху. Если ввести аффинные координаты в модели $\widehat{Л}^n$ так, что $\widehat{Л}^n \equiv \{x^1 > 0\}$, то

$$\hat{l}_X = \{x^1 > 0;\ x^2, \ldots, x^n = \mathrm{const}\},$$

а все остальные прямые изображаются полуокружностями:

$$\begin{aligned}
x^1 &= R \sin \varphi, \\
x^2 &= x_0^2 + R \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cdots \cos \alpha_{n-2} \cos \varphi, \\
x^3 &= x_0^3 + R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cdots \cos \alpha_{n-2} \cos \varphi, \\
x^4 &= x_0^4 + R \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \cdots \cos \alpha_{n-2} \cos \varphi, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^n &= x_0^n + R \sin \alpha_{n-2} \cos \varphi;\ 0 < \varphi < \pi,\ R > 0.
\end{aligned}$$

Движения в пространстве Лобачевского в модели изобразятся либо симметриями относительно евклидовой гиперплоскости (E-гиперплоскости) перпендикулярной E-гиперплоскости $H \equiv \{x^1 = 0\}$, либо инверсией относительно E-гиперсферы с центром, лежащим в H.

1. Отображения семейств прямых

Пусть $\{l_X : X \in Л^n\}$ — упомянутое выше семейство параллельных прямых, а $\{l_X^k : X \in Л^n\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ — семейство прямых таких, что прямая l_X^k проходит через X под углом α_k к прямой l_X, причем прямые l_O, $l_O^1, \ldots, l_O^n$ таковы, что никакие n из них не лежат в одной гиперплоскости.

Положим $D_X = l_X \cup \bigcup_{k=1}^{n} l_X^k \ \{\widehat{l}_X^k \| l_O^k\}$.

Теорема 1. *Если $f: Л^n \to Л^n$ $(n \geqslant 2)$ — биективное отображение, такое, что $f(D_X) = D_{f(X)}$, то f есть движение.*

Доказательство. Пусть $n = 2$.

1. Рассмотрим случай, когда углы α_1 и α_2 равны.

a) Ясно, что $f(l_X) = l_{f(X)}$, и можно считать, что $f(l_X^i) = l_{f(X)}^i$ $(i = 1, 2)$. Этот факт следует из того, что можно взять множества D_X и D_{Y_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ так, что $D_X \cap D_{Y_k} = l_X$, $D_{Y_k} \cap D_{Y_m} = l_X$. $(k \neq m)$.

Если $\{X_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ — точки, такие, что их ординаты равны, и если x_i^2 — абсциссы, то $x_{i+1}^2 = x_i^2 + d$, где $d = \text{const} > 0$. Пусть $\{D_{X_i}\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ таковы, что

$$D_{X_i} \cap D_{X_{i+1}} = l_{X_i}^2, \ D_{X_i} \cap D_{X_j} = \varnothing \quad (j \neq i \pm 1).$$

Тогда

$$f\Big(\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} D_{X_i}\Big) = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} D_{f(X_i)} \tag{1}$$

и точки $\{\hat{f}(X_i)\}$ $(-\infty < i < +\infty)$ таковы, что если $\hat{f}(X_i) = (y_i^1, \ y_i^2)$, то $y_i^1 = y_j^1$, $y_{i+1}^2 = y_i^2 + \lambda d$, где $\lambda > 0$. Это следует из биективности отображения f.

Пусть L — орицикл, причем $\hat{L} \equiv \{x^1 = a = \text{const}\}$, где a — наибольшее значение ординаты для $\hat{l}_{X_i}^1$, $\hat{l}_{X_i}^2$. Пусть

$$M = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} D_{X_i}, \ \{Y_i\} = (L \cap M) \setminus \Big(L \cap \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} l_{X_i}\Big). \tag{2}$$

Если $\{Z_i\}$ $(-\infty < i < +\infty)$ — точки, аналогичные точкам $\{Y_i\}$ для множества $f(M)$, то можно считать, что $Z_i = f(Y_i)$, т. е. f отображает $\{Y_i\}$ на $\{Z_i\}$ с сохранением направления (монотонно). В самом деле, пусть даны прямые $\{l_{X_i}, \ l_{Y_i}\}$. По ним однозначно строится множество (2) и, т. к. f сохранит полученную конструкцию, то утверждение очевидно. Сдвигая множество M вправо (влево) на $d/2, \ldots, d/2^k, \ldots$, получим на L всюду плотное множество L_0, которое изометрично (с точностью до множителя $\lambda = \text{const} > 0$) отобразится на орицикл L', аналогичный орициклу L для множества $f(M)$. Тогда $L_0' = f(L_0)$ и L_0' — всюду плотное множество на L'.

(b) Пусть X — произвольная точка на L. Тогда существует последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_0$, монотонно сходящаяся к точке X. Если Y — предельная точка на L' для последовательности $\{f(X_n)\}$, то $Y = f(X)$.

Действительно, пусть

$$\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\} = (\hat{D}_X \cap H) \setminus \hat{l}_X, \quad W_i = \hat{l}_{Z_i} \cap \hat{L} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

причем $W_1 < W_2 < W_3 < W_4$ на L (где можно ввести порядок). Тогда существуют последовательности $\{W_i(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset L_0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ такие, что $W_i(n) < W_i(n+1)$ $(i=1, 3)$, $W_j(n) > W_j(n+1)$ $(j=2, 4)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} W_i(n) = W_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$, причем $W_2(n)$ симметрична $W_3(n)$ относительно X на $\hat{L}$. По прямым $l_{W_2(n)}$, $l_{W_3(n)}$ однозначно находится прямая $l^2_{P_n}$ такая, что $l_{W_2(n)}$, $l^2_{P_n} \subset D_{P_n}$; $l^2_{P_n}$, $l_{W_3(n)} \subset D_{K_n}$ и прямая $l^2_{P_n}$ лежит внутри области, ограниченной прямыми l^1_X и l^2_X, содержащей часть прямой l_X, ордината точек которой изменяется от нуля до ординаты точки X. Так как D_X не пересекается с прямыми $l_{W_1(n)}$, $l_{W_4(n)}$, $l^2_{P_n}$ и отображение $\hat{f}$ сохраняет это свойство и, кроме того, отображает последовательности $\{W_i(n)\}$ $(i=1, 2, 3, 4)$ гомотетично на $\hat{L}'$ (т. е. изометрично с точностью до множителя $\lambda > 0$), то $f(D_X) = D_Y$. Откуда получаем, что $Y = f(X)$. Итак, $\hat{f}$ отображает орицикл $\hat{L}$ гомотетично на орицикл $\hat{L}'$.

c) Так как $f(D_X) = D_{f(X)}$, то легко убедиться, что отображение $\hat{f}$ есть гомотетия, которую можно представить как композицию симметрий и инверсий, изображающих движение. Итак, в данном случае f есть движение.

2. Пусть углы α_1 и α_2 различны. Положим $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < \pi/2$. Если взять точки $\{X_n\}$ $(-\infty < n < +\infty)$ в виде $X_n = (r_n \sin\alpha_1, r_n(1/\sin\gamma + \cos\alpha_1))$, где $\{r_n\}$ — последовательность положительных чисел, такая, что

$$r_{n+1} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} r_n \quad (-\infty < n < +\infty),$$

то возможна конструкция аналогичная (2) с E-касательной эквидистантой $\hat{e}$, проходящей через точку $(0, 0)$ и наклоненной к оси x^2 под углом γ, где $\sin\gamma = (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)/\sin(\alpha_1 + \alpha_2)$. Числа $\{r_n\}$ будут радиусами полуокружностей, изображающих прямые из множества

$$M = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} D_{X_n}.$$

Рассмотрим прямые l_{X_m} и $l_{X_{m+1}}$. Можно построить новую последовательность точек $\{Y_n\}$, аналогичную последовательности $\{X_n\}$, причем так, что $Y_n \in l_{X_m}$, а $Y_{n+2} \in l_{X_{m+1}}$, т. е. точка Y_{n+1} будет находиться на прямой $l_{Y_{n+1}}$, лежащей на плоскости $\hat{Л}^2$ между прямыми l_{X_m} и $l_{X_{m+1}}$, а соответствующая E-касательная эквидистанта проходит через точку

$$\left(0, \frac{\varkappa \sin\alpha_1}{\varkappa + 1} r_m\right), \quad \varkappa = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}.$$

Но тогда прямая $l_{Y_{n+1}}$ отметит на прямой $l^2_{X_m}$ точку, которая гомотетично будет отображаться в аналогичную точку для множеств $f[\bigcup\limits_n D_{X_n}]$ и $f[\bigcup\limits_n D_{Y_n}]$.

Для последовательности $\{Y_n\}$ можно повторить это рассуждение и в результате получить на прямой $l^2_{X_m}$ всюду плотное множество точек, которое будет гомотетично отображаться на аналогичное множество на прямой $f(l^2_{X_m})$. И вообще, на множестве M существует всюду плотное множество M_0, гомотетично отображающееся на всюду плотное множество M'_0 на множестве $f(M)$.

Пусть l — прямая, проходящая через точку X_m множества M, и $\hat{l}$ — прямая, симметричная прямой $\hat{l}^2_{X_m}$ относительно прямой l_{X_m}. Тогда можно найти последовательности точек $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$ из множества M_0 такие, что прямая $\hat{l}$ зажата между прямыми $\{\hat{l}_{Y_n}\}$ и $\{\hat{l}_{Z_n}\}$, причем прямые $\{\hat{l}_{Y_n}\}$ расположены левее прямой $\hat{l}$, а прямые $\{\hat{l}_{Z_n}\}$ — правее, т. е., если

$$\{V_n\}=\{\hat{l}_{Y_n}\}\cap H,\ \{W_n\}=\{\hat{l}_{Z_n}\}\cap H,\ \{V,\ W\}=\hat{l}\cap H,$$

то $V_n < V_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$, $W_n > W_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = W$, считая, что на H задан порядок.

Поскольку отображение $\hat{f}$ сохранит всю эту конструкцию, то прямая l отобразится на прямую, проходящую через точку $f(X_m)$ и E-симметричную прямой $f(l^2_{X_m})$ относительно прямой $f(l_{X_m})$, т. е. прямые l, l_{X_m}, $l^2_{X_m}$ образуют множество, рассмотренное в п. 1). Отсюда получаем требуемое утверждение об отображении f.

Теорема для $n=2$ доказана.

3. Пусть теорема верна для любой размерности меньшей, чем n.

4. Рассмотрим n-мерное пространстве Лобачевского.

a) Через P^i_X $(i=1,\dots,n)$ обозначим двумерную плоскость, натянутую на прямые l_X и l^i_X. Тогда $f(P^i_X)$ $(i=1,\dots,n)$ будет также двумерной плоскостью. В самом деле, на плоскости P^i_X найдется прямая l^i_Y, проходящая через точку $Y\in P^i_X$ такая, что $l^i_Y\cap l^i_X\neq\varnothing$ и $l^i_Y\cap l_X\neq\varnothing$. Но тогда, рассматривая $f(P^i_X)$ в модели Клейна пространства Лобачевского, видим, что $f(P^i_X)$ содержит три E-прямые, имеющие непустое пересечение[1]. Двигая прямую l^i_Y по плоскости P^i_X так, что $l^i_Y\cap l_X\neq\varnothing$ и $l^i_Y\cap l_X\neq\varnothing$, получим, что кусок плоскости P^i_X перейдет в кусок E-плоскости в модели Клейна, и, так как с помощью прямых l^i_Y, l^i_X, l_X можно исчерпать всю плоскость P^i_X, то $f(P^i_X)$ в модели Клейна есть E-плоскость, т. е. $f(P^i_X)$ будет двумерной плоскостью.

b) Существуют две прямые l^i_X, l^k_X $(i\neq k)$ такие, что некоторая плоскость P^j_Y $(j\neq i,\ k)$ пересекает плоскость P_X, натянутую на прямые l^i_X и l^k_X в точках этих прямых. Пусть $l=P^j_Y\cap P_X$ — прямая, получаемая в пересечении. Ясно, что прямая l есть некоторая прямая l^j_Z и, значит, переходит в прямую при отображении f. Но тогда в модели Клейна множество $f(P_X)$ содержит три E-прямые, имеющие непустое пересечение. Так же, как и в п. 4. а), можно пока-

[1] Образом прямой будет прямая.

зать, что $f(P_X)$ есть двумерная плоскость. Далее под плоскостью P_X понимаем плоскость, порожденную прямыми l_X^1 и l_X^2.

c) Пусть G — гиперплоскость, натянутая на прямые $l_O, l_O^3, \ldots$ $\ldots, l_O^n$. Множество $f(G)$ есть гиперплоскость. Действительно, это тривиально при $n=3$, т. е., когда $\dim G = 2$. Если предположить, что это верно для $\dim G < n-1$, то можно считать, что образ $(n-2)$-мерной плоскости G_1, порожденной прямыми $l_O, l_O^3, \ldots, l_O^{n-1}$, будет $(n-2)$-мерной плоскостью, лежащей в гиперплоскости E, порожденной прямыми $f(l_O), f(l_O^3), \ldots, f(l_O^n)$, причем $f(G_1)$ натянута на $f(l_O), f(l_O^3), \ldots, f(l_O^{n-1})$. Пусть $l_{f(O)}^a = f(l_O^n)$. Но тогда $f(G) \subset E$ и, если X — произвольная точка гиперплоскости E, не лежащая в $f(G_1)$, то существует прямая l_Y^a, проходящая через точки X и Y, где $Y \in f(G_1)$. Отсюда следует, что $f^{-1}(X) \in G$ и, значит, $f(G) = E$, т. е. $f(G)$ есть гиперплоскость. И вообще гиперплоскость, порожденная прямыми $l_X, l_X^{i_1}, \ldots, l_X^{i_{n-2}}$, отображается на гиперплоскость. Без ограничения общности можно считать, что

$$f(l_X) = l_{f(X)}, \quad f(l_X^k) = l_{f(X)}^k \quad (k=3, \ldots, n), \quad f(l_X^{n+1}) = l_{f(X)}^{n+1}, \quad f(G) = G,$$

где l_X^{n+1} есть прямая, получаемая в пересечении гиперплоскости G и плоскости P_X из п. b), т. к. существует движение, с помощью которого этого можно добиться. При этом, конечно, прямые l_X^1 и l_X^2 будут отображаться в некоторые другие прямые, но, имея это в виду, считаем, что $f(l_X^i) = l_{f(X)}^i$ $(i=1, 2)$. Но тогда в гиперплоскости G есть множество

$$T_X = l_X \cup \bigcup_{i=3}^{n+1} l_X^i$$

такое, что $f(T_X) = T_{f(X)}$, $X \in G$.

В силу п. 3 отсюда следует, что f есть движение на гиперплоскости G, т. е. любую прямую, лежащую в G, переводит в прямую, лежащую в G, а отображение $\hat{f}$ есть гомотетия на $\hat{G}$.

d) Пусть l — произвольная прямая, не лежащая в G. Тогда можно считать, что $l \cap G \neq \varnothing$ в силу п. c), и представить l, как пересечение двух плоскостей Q_1 и Q_2, причем $Q_i (i=1, 2)$ есть плоскость, натянутая на прямые l_X^i и l, где X — точка пересечения прямой l с гиперплоскостью G. Пусть $l_i = Q_i \cap G$. Это есть прямая, и существует точка Z такая, что плоскость P_Z^2 пересекает Q_1 в точках прямых l_X^1 и l_1. Так как отображение f переводит прямые l_X^1, l_1 и l_3, где $l_3 = P_Z^2 \cap Q_1$, в прямые, то в модели Клейна множество $f(Q_1)$ содержит три E-прямые, имеющие непустое пересечение, и значит, как и ранее, можно показать, что $f(Q_1)$ есть плоскость. Значит $f(Q_i)$ $(i=1, 2)$ есть плоскость. Но тогда $f(l) = f(Q_1) \cap f(Q_2)$ будет прямой.

e) Итак, отображение f переводит любую прямую в прямую, но тогда, используя п. 4. c), легко убедиться, что $\hat{f}$ есть гомотетия на $\hat{Л}^n$, т. е. f есть движение.

Теорема доказана.

Пусть $\{l_X^k : X \in Л^n\}$ $(k = 1, \dots, n+1)$ — семейство прямых, такое, что прямая l_X^k проходит через точку X под углом α_k к прямой l_X. Пусть прямые $l_X^1, \dots, l_X^{n+1}$ таковы, что никакие n из них не лежат в одной гиперплоскости.

Следствие. Если $f: Л^n \to Л^n$ $(n \geqslant 2)$ — биективное отображение такое, что $f(D_X) = D_{f(X)}$, где $D_X = \bigcup\limits_k l_X^k$ $\{\hat{l}_X^k \parallel l_O^k\}$, то f есть движение.

2. Отображение сфер

Пусть $\{l_X : X \in Л^n\}$ — указанное во введении, семейство прямых. Псевдоцентром сферы $S_X(r)$, где $X \in l_X$, называется точка Y, отстоящая от точки X на прямой l_X на расстоянии $k \ln \operatorname{sh} \frac{r}{k}$ в направлении параллельности прямых заданного семейства. Псевдоцентр в модели Пуанкаре изображается E-центром сферы $\hat{S}_X(r)$. Гиперсферу $S_Y(r)$ с псевдоцентром X будем обозначать через Σ_X.

Теорема 2. *Если $f: Л^n \to Л^n$ $(n \geqslant 2)$ — биективное отображение такое, что $f(\Sigma_X) = \Sigma_{f(X)}$, то f есть движение.*

Доказательство. а) Пусть L — орицикл такой, что $\hat{L}$ будет E-параллельным E-гиперплоскости $H \equiv \{x^1 = 0\}$, и $\{X_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ — последовательность точек на L на расстоянии r друг от друга. Тогда вид множества

$$M = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \Sigma_{X_n}$$

сохраняется после отображения, что видно на модели Пуанкаре. Значит точки $\{X_n\}$ отобразятся в аналогичные точки $\{X'_n\}$, лежащие на орицикле L', который лежит в гиперорисфере H' такой, что $\hat{H}' \equiv \{x' = \text{const} > 0\}$.

Если $\{Y_n\}$ — другие точки на L, аналогичные точкам $\{X_n\}$, то они отобразятся в точки $\{Y'_n\}$ на орицикле L'', лежащем в гиперорисфере $\hat{H}'' \equiv \{x^1 = \text{const} > 0\}$, причем орициклы $\hat{L}'$ и $\hat{L}''$ будут E-параллельными. Называя указанные точки $\{X_n\}$ r-орициклом, получаем, что r-орицикл отображается на r-орицикл, причем монотонно.

b) Будем называть k-треугольником множество T, состоящее из вершин и точек на расстоянии r друг от друга треугольника, стороны которого являются отрезками орициклов длины $(2k+1)r$, где k — натуральное число, лежащего в гиперорисфере $\hat{H} \equiv \{x^1 = \text{const} > 0\}$. Ясно, что f отображает k-треугольник на k-треугольник. Значит гиперорисферы H' и H'' из п. а) совпадают.

Пусть дано множество M из п. а). Фиксируем точку X_0 на M и рассмотрим k_i-треугольники $T_i (i = 1, 2, \dots)$ такие, что одна их сторона L_i^1 лежит на орицикле L, а $X_0 \in T_i$, причем X_0 есть средняя точка стороны L_i^1. Кроме того, все треугольники лежат в двумерной орисфере P такой, что $\hat{P}$ будет E-параллельна гиперорисфере $\hat{H}$. Когда в каждой точке множества T_i взята сфера Σ_X, то полученное множество обозначим через $\tilde{T}_i$. Пусть числа $k_i (i=1, 2, \ldots)$ таковы, что

$$k_i < k_j, \quad \tilde{T}_i \cap \tilde{T}_j = \tilde{L}_i^1 \quad (i < j).$$

Через вершины Y_i треугольников, противолежащих стороне L_i^1, и точку X_0 проведем орицикл K. Пусть $\{Z_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ есть r-орицикл, соответствующий K, причем $X_0 = Z_0$. Тогда

$$\Sigma_{Y_i} \cap \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \Sigma_{Z_n} \neq \varnothing \quad (i=1, 2, \ldots).$$

После отображения вся эта конструкция сохранится и r-орицикл $\{Z_n\}$, ортогональный r-орициклу $\{X_n\}$, перейдет в r-орицикл $\{Z'_n\}$, причем r-орициклы $\{X'_n\}$ и $\{Z'_n\}$ будут ортогональными и будут лежать в одной орисфере E-параллельной гиперорисфере $\hat{H}$.

c) Пусть S есть r-сетка, т. е. множество точек, являющихся точками пересечений двух ортогональных семейств орициклов, лежащих в орисфере P, причем орициклы каждого семейства отстоят один от другого на расстоянии r. Тогда из п. b) следует, что r-сетка S отобразится в r-сетку, откуда следует, что $\sqrt{2}r$-орицикл отобразится в $\sqrt{2}r$-орицикл.

Если L и K являются r-орициклом и $\sqrt{2}r$-орициклом с общей точкой, причем соответствующий им орицикл один и тот же, то это же будет наблюдаться и после отображения. Значит точки на орицикле на расстоянии $\varkappa r$, где $\varkappa$ — дробная часть числа $\sqrt{2}$, перейдут в такие же две точки, т. е. $(n-2)$-мерные сферы $\Sigma_X(\varkappa r)$ радиуса $\varkappa r$, лежащие в гиперорисфере переходят в такие же сферы. Но тогда, рассматривая $\varkappa r$-сетку, можно все рассуждения повторить. В итоге, лежащие в гиперорисфере $(n-2)$-мерные сферы $\Sigma_X(\varkappa^m r)$, при отображении переходят в аналогичные для любого натурального числа m. Отсюда уже легко заключить, что орицикл L из п. а) отображается на аналогичный орицикл, т. е. $\hat{f}(\{x^1 = \alpha\}) = \{x^1 = \beta\}$, где $\alpha, \beta = \text{const} > 0$.

d) Рассмотрим множество

$$\hat{K}_X = \bigcup_{Y \in \hat{l}_X} \hat{\Sigma}_Y, \quad X \in H.$$

Это есть E-конус с вершиной X. Если бы $\hat{f}(K_X)$ не было E-конусом с вершиной $X^* \in H$, то нашлись бы две сферы Σ_Y и Σ_Z из $f(K_X)$, псевдоцентры которых не лежат на прямой l_Y, причем Σ_Y имеет с Σ_Z всего одну общую точку W. Но тогда гиперорисфера G, содержащая точку W, пересекается с Σ_Y и Σ_Z еще по некоторым множествам мощности континуум. Это противоречит тому, что прообразы сфер Σ_Y и Σ_Z могли пересекаться с гиперорисферой $f^{-1}(G)$ только по точке $f^{-1}(W)$. Итак, $\hat{f}(\hat{K}_X) = \hat{K}_{X^*}$ и, кроме того, $f(l_X) = l_{f(X)}$.

e) Пусть $\hat{K}_X$ есть E-конус из п. d). Пусть l_Y — прямая такая, что она отлична от прямой l_X, и точка Y принадлежит границе $\hat{C}_X$

множества $\hat{K}_X$. Тогда существует такая сфера $\Sigma_Z \subset K_X$, что $Y \in \Sigma_Z$. Но отсюда сразу следует, что $f(Y)$ принадлежит границе множества K_{X*}. Значит $\hat{f}(\hat{C}_X) = \hat{C}_{X*}$.

f) Пусть X — произвольная точка в пространстве. Тогда множество $\hat{K}_X$, являющееся пересечением всех множеств $\hat{K}_Y$ $(Y \in H)$ таких, что $X \in C_Y$, будет круговым E-конусом того же раствора, что и E-конусы $\hat{K}_Y$. Пусть $\hat{L}$ — часть прямой $\hat{l}_X$, координата x^1 которой меняется от такой же координаты точки X до бесконечности. Тогда множество

$$K_{\overline{X}} = Л^n \setminus \bigcup_{L \cap K_Y \neq \varnothing} K_Y$$

будет также E-конусом в модели Пуанкаре и $\hat{K}_{\overline{X}} \cup \hat{K}_X$ есть двойной E-конус. Ясно, что $\hat{K}_{\overline{X}}$ при отображении перейдет в такой же E-конус, т. е. $\hat{f}$ сохраняет двойные E-конусы, а также их границы. Далее под E-конусом C_X понимаем границу двойного E-конуса.

g) Продолжая E-конусы C_X на всё евклидово пространство E^n естественным образом и рассматривая отображение

$$F(X) = \begin{cases} \hat{f}(X), & X \in \hat{Л}^n, \\ X^*, & X \in H, \\ \sigma \circ \hat{f} \circ \sigma^{-1}(X), & X \in \{x^1 < 0\}, \end{cases}$$

где σ — симметрия относительно E-гиперплоскости H, получим, что отображение $F: E^n \to E^n$ биективно и $F(C_X) = C_{F(X)}$. Но тогда по теореме А. Д. Александрова [1], [2] отображение F будет аффинным, т. е.

$$F^k(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i^k x^i + a^k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Поскольку $F(H) = H$, то $a_k^1 = 0$ $(k = 2, \dots, n)$, $a^1 = 0$, и в силу $F(\hat{l}_X) = \hat{l}_{F(X)}$ следует $a_1^k = 0$ $(k = 2, \dots, n)$. Так как образ E-сферы $x^{2^2} + \dots + x^{n^2} = R^2$ есть $(n-2)$-мерная E-сфера в H, то матрица A, соответствующая F, имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{U} \\ 0 & \end{bmatrix},$$

где U — унитарная матрица. Но вектор $(1, \operatorname{tg}\alpha, 0, \dots, 0)$, где α — угол, равный половине раствора наших конусов, после отображения должен иметь угол α с вектором $(1, 0, \dots, 0)$. Отсюда находим, что $a_1^1 = 1$.

Итак, $\hat{f}$ можно представить как композицию симметрий относительно E-гиперплоскостей, ортогональных E-гиперплоскости H, т. е. f есть движение. Теорема доказана.

Пусть S_X обозначает гиперсферу радиуса $r > 0$ с центром в точке X в n-мерном пространстве Лобачевского.

Теорема 3. *Если $f: Л^n \to Л^n$ $(n \geqslant 2)$ — биективное отображение такое, что $f(S_X) = S_{f(X)}$, то f есть движение.*

Доказательство. Пусть l — произвольная прямая и $\{X_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ — последовательность точек на ней таких, что для всякого n точка X_n принадлежит сферам $S_{X_{n-1}}$ и $S_{X_{n+1}}$, а точки X_{n-1}, X_{n+1} принадлежат сфере S_{X_n}. Пусть

$$M = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_{X_n}.$$

Так как после отображения эта конструкция сохранится, то точки $\{X_n\}$ перейдут в точки $\{X'_n\}$, лежащие на прямой l', на расстоянии r друг от друга.

Пусть $\{Z_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ — другая последовательность аналогичных точек на прямой l. Они перейдут в точки $\{Z'_n\}$ на прямой l''. Прямые l' и l'' либо скрещиваются, либо параллельны, либо расходятся, либо совпадают. Первые три ситуации невозможны, т. к. множества M и $K = \bigcup_n S_{Z_n}$ пересекаются друг с другом по каждой из составляющих их сфере, и значит этот факт должен наблюдаться и после отображения, чего в упомянутых ситуациях быть не может. Это хорошо видно на модели Пуанкаре, в которой сфера S_X изображается E-сферой радиуса $x^1 \operatorname{sh}\frac{r}{k}$ с центром $\left(x^1 \operatorname{ch}\frac{r}{k}, x^2, \ldots, x^n\right)$, где $(x^1, \ldots, x^n)$ изображает точку X, а $k = \mathrm{const}$ определяет геометрию Лобачевского.

Итак, прямые l', l'' совпадают. Но тем самым показано, что отображение f есть движение, поскольку можно считать, что $f(l_X) = l_{f(X)}$, и далее вести доказательство, как в пп. (d), (e), (f), (g) теоремы 2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д., Овчинникова В. В. Замечания к основам теории относительности. Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., 1953, вып. 11, с. 95—110.

2. Alexandrov A. D. A contribution to chronogeometry. Canadian J. Math., v. 19, № 6, 1967, p. 1119—1126.

г. Новосибирск

Поступила
11 I 1972