ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО

Г.Л. Бухбиндер

Задачи по тензорному исчислению

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Учебно-методическое пособие
(для студентов физического факультета)

2011

УДК 152.972

Задачи по тензорному исчислению: учебно-методическое пособие / Г.Л. Бухбиндер – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2011. – ??с.

Задачи по тензорному исчислению курса "Основы векторного и тензорного анализа соответствуют действующей учебной программе и позволяют студентам лучше усвоить лекционный материал и научиться его применять.

Для студентов физических факультетов университетов.

УДК 152.972

ISBN

$$\bar{R}_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2\bar{A}_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1\bar{A}_1)}{\partial x^2}\right].$$

3.15. $3/(x^1)^2$.
3.16. x^2/x^1.

где x это или x^1, или x^2, или x^3 .
1.3. Параболические координаты определяются уравнениями

$$y^1 = x^1 x^2 \cos x^3, \qquad y^2 = x^1 x^2 \sin x^3, \qquad y^3 = \frac{1}{2}[(x^1)^2 - (x^2)^2].$$

Показать, что x^1–поверхности и x^2–поверхности – параболоиды вращения, а x^3–поверхности – плоскости, проходящие через ось y^3 .
1.4. Найти координатные поверхности для параболических цилиндрических координат

$$y^1 = x^1 x^2, \qquad y^2 = \frac{1}{2}[(x^1)^2 - (x^2)^2], \qquad y^3 = x^3.$$

1.5. Найти базисные векторы $\mathbf{e}_i$ для следующих координатных систем:
а) декартова ортогональная система;
б) сферическая;
в) цилиндрическая
г) эллиптическая;
д) параболическая.
1.6. Показать, что базисные векторы предыдущей задачи ортогональны.
1.7. Найти матрицы g_{mn} и g^{mn} для координатных систем из задачи **1.5.** Вычислить определитель $g = |g_{mn}|$.
1.8. В некоторой системе координат в точке P заданы два вектора $a^r(1,\, 2,\, 0)$ и $b^r(2,\, -1,\, 1)$. Найти длины векторов и угол между ними, если

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.9. Показать, что если y^i – декартовы ортогональные координаты, то в произвольной системе координат x^i имеет место соотношение

$$g^{mn} = \sum_i \frac{\partial x^m}{\partial y^i}\frac{\partial x^n}{\partial y^i}.$$

1.10. Пусть $(1,\ \ 2,\ \ -1)$ – координаты вектора в базисе $\mathbf{e}_i$. Найти его координаты в базисе $\mathbf{e}'_i$, если

$$\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

1.11. В точке P заданы контравариантные составляющие вектора A^r. Найти его ковариантные составляющие для систем координат задачи **1.5**.
1.12. Написать выражение для ds^2 для координатных систем из **1.5**.
1.13. Криволинейные координаты x^i с прямоугольными координатами y^i соотношениями

$$x^1 = -y^1, \quad x^2 = y^2 + y^3, \quad x^3 = y^3 - y^2.$$

Показать, что система координат x^i является ортогональной. Найти найти в этой системе компоненты матрицы g_{ij} и длины векторов локального базиса.
1.14. Найти разложение векторного произведения $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$ по взаимному базису $\mathbf{e}^k$.
1.15. Показать, что $(\mathbf{e}^1,\ \ \mathbf{e}^2,\ \ \mathbf{e}^3) = 1/\sqrt{g}$.
1.16. Найти разложение векторного произведения $\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j$ по базису $\mathbf{e}_k$.
1.17. Записать векторное произведение $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ через их контравариантные составляющие.
1.18. Записать векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ через их ковариантные составляющие.
1.19. Найти объём, построенный на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.
1.20. Показать, что элемент объёма dV в криволинейных координатах есть

$$dV = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3.$$

Указание: Найти смешанное произведение векторов бесконечно малой длины, направленных вдоль касательных к координатным линиям.

б) $\Gamma_{2,21} = -\Gamma_{1,22} = x^1$, $\Gamma_{3,13} = -\Gamma_{1,33} = x^1(\sin x^2)^2$, $\Gamma_{3,23} = -\Gamma_{2,33} = (x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2$, $\Gamma^1_{22} = -x^1$, $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = 1/x^1$, $\Gamma^2_{33} = -\sin x^2 \cos x^2$, $\Gamma^3_{23} = ctg\, x^2$, $\Gamma^1_{33} = -x^1(\sin x^2)^2$;
3.8

$$\Delta\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right)\right]$$

3.9.
а)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2};$$

б)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}.$$

3.11.

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\big(h_2h_3\bar{A}_1\big) + \frac{\partial}{\partial x^2}\big(h_1h_3\bar{A}_2\big) + \frac{\partial}{\partial x^3}\big(h_1h_2\bar{A}_3\big)\right].$$

3.12.
а)

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\bar{A}_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{A}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\bar{A}_z}{\partial z};$$

б)

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\sin\theta\,\bar{A}_r\big) + \frac{\partial}{\partial\theta}\big(r\sin\theta\,\bar{A}_\theta\big) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\big(r\bar{A}_\varphi\big)\right].$$

3.14.

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3\bar{A}_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2\bar{A}_2)}{\partial x^3}\right], \quad \bar{R}_2 = \frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial(h_1\bar{A}_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(h_3\bar{A}_3)}{\partial x^1}\right],$$

Ответы

1. Криволинейные координаты

1.1. x^1–поверхности – цилиндры, имеющие общую ось вдоль оси y^3, x^2–поверхности – плоскости, проходящие через ось y^3, x^3–поверхности – плоскости параллельные плоскости $y^3=0$.
1.4. x^1 и x^2–поверхности – параболические цилиндры, x^3–поверхности – плоскости, параллельные плоскости $y^3=0$.
1.5. а) $\mathbf{e}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0)$, $\mathbf{e}_3=(0,0,1)$;
б) $\mathbf{e}_1=(\sin x^2\cos x^3,\ \ \sin x^2\sin x^3,\ \ \cos x^2)$
$\mathbf{e}_2=(x^1\cos x^2\cos x^3,\ \ x^1\cos x^2\sin x^3,\ \ \sin x^2)$
$\mathbf{e}_3=(-x^1\sin x^2\sin x^3,\ \ x^1\sin x^2\cos x^3,\ \ 0)$

в) $\mathbf{e}_1=(\cos x^2,\ \ \sin x^2,\ \ 0)$
$\mathbf{e}_2=(-x^1\sin x^2,\ \ x^1\cos x^2,\ \ 0)$
$\mathbf{e}_3=(0,\ \ 0,\ \ 1)$

г)
$$\mathbf{e}_i=\frac{1}{2}\left(\frac{y^1}{x^i-a},\ \ \frac{y^2}{x^i-b},\ \ \frac{y^3}{x^i-c}\right)\qquad (i=1,2,3.)$$

д) $\mathbf{e}_1=(x^2\cos x^3,\ \ x^2\sin x^3,\ \ x^1)$
$\mathbf{e}_2=(x^1\cos x^3,\ \ x^1\sin x^3,\ \ -x^2)$
$\mathbf{e}_3=(-x^1x^2\sin x^3,\ \ x^1x^2\cos x^3,\ \ 0)$

1.7. а) $g_{mn}=\delta_{mn}$, $g^{mn}=\delta^{mn}$, $g=1$
б) $g=(x^1)^4(\sin x^2)^2$,

$$g_{mn}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(x^1)^2&0\\0&0&(x^1)^2(\sin x^2)^2\end{pmatrix}$$

$$g^{mn}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(x^1)^{-2}&0\\0&0&(x^1)^{-2}(\sin x^2)^{-2}\end{pmatrix}$$

являются истинными тензорами.
2.18. Показать, что g_{mn}, g^{mn}, δ^m_n являются ассоциированными тензорами.
2.19. Показать, что ε_{rst} и ε^{rst} являются ассоциированными тензорами.
2.20. Найти физические составляющие тензоров $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^i}$ и A_{rs} в: а) цилиндрической, б) сферической системах координат.
2.21. Пусть A_{rs} – постоянный тензор в декартовых ортогональных координатах y^r, имеющий вид:

$$A_{rs}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Найти собственные векторы и собственные значения A_{rs}.

§3. Ковариантное дифференцирование.

3.1.Доказать равенства:

$$\frac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial x^j}=\Gamma_{k,ij}\mathbf{e}^k\,;\qquad \frac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial x^j}=\Gamma^k_{ij}\mathbf{e}_k\,;\qquad \frac{\partial\mathbf{e}^i}{\partial x^j}=-\Gamma^i_{jk}\mathbf{e}^k,$$

где $\Gamma_{k,ij}$ и Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля соответственно первого и второго рода.
3.2. Доказать равенство:

$$\Gamma_{k,ij}=\sum_p\frac{\partial y^p}{\partial x^k}\frac{\partial^2y^p}{\partial x^i\partial x^j},$$

y^p — декартовы ортогональные координаты.
3.3. Вычислить символы Кристоффеля Γ^r_{mn} и $\Gamma_{r,mn}$ в координатах:
а) цилиндрических ;
б) сферических ;

в) параболических .

3.4. Пусть элемент длины имеет вид

$$ds^2 = h_1^2(dx^1)^2 + h_2^2(dx^2)^2 + h_3^2(dx^3)^2.$$

Показать, что

$$\Gamma_{k,ij} = 0, \qquad \Gamma_{i,ij} = -\Gamma_{j,ii} = h_i\frac{\partial h_i}{\partial x^j}, \qquad \Gamma_{i,ii} = \frac{\partial h_i}{\partial x^i}.$$

$$\Gamma^k_{ij} = 0, \quad \Gamma^j_{ii} = -\frac{h_i}{h_j^2}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}, \quad \Gamma^i_{ij} = \frac{\partial \log h_i}{\partial x^j}, \quad \Gamma^i_{ii} = \frac{\partial \log h_i}{\partial x^i}.$$

(Суммирования по повторяющимся индексам нет).

3.5. Используя равенство $g_{rs,t} = 0$, проверить, что

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^t} = \Gamma_{r,st} + \Gamma_{s,rt}.$$

3.6. Написав в развёрнутом виде тензорное равенство $\varepsilon_{rst,p} = 0$ и подставляя $r,s,t = 1,2,3$, доказать , что

$$\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial x^p} = \Gamma^m_{mp}.$$

3.7. Показать, что лапласиан Φ определяется формулой

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}\,g^{rs}\frac{\partial\Phi}{\partial x^s}\right).$$

3.8. Записать лапласиан $\Delta\Phi$ в ортогональных координатах, используя коэффициенты Ляме $h_i = \sqrt{g}_{ii}$.

3.9. Записать лапласиан в: а) цилиндрических, б) сферических координатах.

3.10. Показать, что дивергенция X^r есть

$$X^r_{\cdot,r} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}\,X^r\right).$$

3.11. Записать дивергенцию вектора A^r в ортогональных координатах, используя коэффициенты Ляме и физические составляющие вектора.

3.12. Записать дивергенцию вектора $\mathbf{A}$ в: а) цилиндрических, б) сферических координатах, используя его физические составляющие.

3.13. Показать, что контравариантные составляющие ротора вектора X_r в произвольной системе координат равны

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial X_3}{\partial x^2} - \frac{\partial X_2}{\partial x^3}\right), \qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x^3} - \frac{\partial X_3}{\partial x^1}\right), \qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x^1} - \frac{\partial X_1}{\partial x^2}\right).$$

3.14. Записать ротор вектора $\mathbf{A}$ в ортогональной системе координат, используя физические составляющие .

3.15. Найти длину вектора $\operatorname{rot}\mathbf{e}_1$, где $\mathbf{e}_i$ - вектор локального базиса системы координат x^i с элементом длины:

$$ds^2 = (x^2dx^1)^2 + (x^1dx^2)^2 + (dx^3)^2 + x^1x^2dx^1dx^2\,.$$

3.16. Вычислить

$$\operatorname{div}\left\{\frac{1}{2}x^2\mathbf{e}^1 - (x^1)^2\mathbf{e}^2\right\},$$

где $\mathbf{e}^i$ - сопряженный базис сферической системы координат x^i.

3.16. В координатах x^i, с элементом длины

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^2dx^2)^2 + (x^3dx^3)^2\,,$$

вычислить ковариантную производную тензора $X_r = (1;\,1;\,0)$.

2.7. Пусть a^m_n – составляющие векторного поля в координатах x^r. Найти составляющие a'^m_1 $(m = 1, 2, 3)$ в координатах x'^r , если

$$\begin{aligned} x^1 &= (x'^1)^2 + x'^2, \qquad\qquad x^1 > x^2 + (x^3)^2, \\ x^2 &= x'^2 - (x'^3)^2, \\ x^3 &= x'^3. \end{aligned}$$

2.8. Выяснить, образует ли объект $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^r \partial x^s}$, где φ – скалярная функция, ковариантный тензор.

2.9. Пусть для произвольных векторов u^r, v^r и объекта a^r_m во всех системах координат выполняется равенство $a^n_m u^m v_n = 1$. Показать, что a^m_n — тензор.

2.10. Показать, что если a^r – тензор, то

$$a^r = \frac{\partial x^r}{\partial x'^s} a'^s.$$

2.11. Пусть a^m_n — тензор второго порядка. Показать, что

$$I_1 = a^m_m, \qquad I_2 = a^m_n a^n_m, \qquad I_3 = \delta^{rst}_{mnp} a^m_r a^n_s a^p_t$$

являются инвариантами.

2.12. Пусть A_{kl} – антисимметричный, а S^{kl} – симметричный тензоры. Доказать, что $A_{kl}S^{kl} = 0$. Вывести следующие два тождества, справедливые для произвольного тензора T_{kl} (T^{kl}):

$$T^{kl}A_{kl} = \frac{1}{2}(T^{kl} - T^{lk})A_{kl}; \qquad T_{kl}S^{kl} = \frac{1}{2}(T_{kl} - T_{lk})S^{kl}.$$

2.13. Показать, что дельта – символ Кронекера δ^r_s — тензор.

2.14. Показать, что δ^{rs}_{mn} и δ^{rst}_{mnp} являются тензорами.

2.15. Показать, что если a_{mn} — истинный ковариантный тензор, то определитель $a = |a_{mn}|$ — псевдоскаляр веса $M = 2$.

2.16. Показать, что если a^n_m — истинный тензор, то определитель $a = |a^n_m|$ — истинный скаляр.

2.17. Показать, что объекты

$$\varepsilon_{rst} = \sqrt{g}\, e_{rst}, \qquad \varepsilon^{rst} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, e^{rst}$$

в) $g = (x^1)^2$,

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

г) $g_{mn} = g^{mn} = 0, \quad (m \neq n)$

$$g_{11} = \frac{g_1}{x^2 - x^3} \qquad g_{22} = \frac{g_2}{x^3 - x^1} \qquad g_{33} = \frac{g_3}{x^1 - x^2}$$

где

$$g_i = \frac{(x^1 - x^2)(x^1 - x^3)(x^2 - x^2)}{(x^i - a)(x^i - b)(x^i - c)}$$

д) $g = [(x^1)^2 + (x^2)^2]^2 (x^1 x^2)^2$,

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} (x^1)^2 + (x^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 + (x^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1x^2)^2 \end{pmatrix}.$$

1 8. $a^2 = 9$, $b^2 = 5$, $\cos\theta = 4/3\sqrt{5}$.

1.10. $(25/3, \;\; 7/3, \;\; -10/3)$.

1.13

1.14 $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sqrt{g}\, e_{ijk}\mathbf{e}^k$; e_{ijk} равно 1 если ijk четная перестановка 1,2,3; – -1 , если ijk нечетная перестановка; – 0, если имеется по крайней мере два одинаковых индекса.

1.15. $\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j = (1/\sqrt{g})\, e^{ijk}\mathbf{e}_k$; e^{ijk} имеет те же составляющие, что и e_{ijk} .

1.17. $c_r = \sqrt{g}\, e_{rkl} a^k b^l$.

1.18. $c^r = (1/\sqrt{g})\, e^{rkl} a_k b_l$.

1.19.

$$V = \sqrt{g}\, e_{rst} a^r b^s c^t = \frac{1}{\sqrt{g}}\, e^{rst} a_r b_s c_t.$$

1.21. Проекции на $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ равны соответственно $1, \; 2, \; -\sqrt{2}$.

2. Тензорная алгебра

2.1. $\delta^{rst}_{mst} = \delta^r_m$.
2.2. В обоих случаях $|a^r_s|$.
2.3 а) $|a^m_n|e_{rst}$, б) $|a^m_n|e^{rst}$.
2.4. $a'_1 = a_1 \cos x'^2 + a_2 \sin x'^2$, $a'_2 = -a_1 x'^1 \sin x'^2 + a_2 x'^1 \cos x'^2$, $a'_3 = a_3$.
2.5. $\lambda'^r = \varphi \dfrac{\partial x'^r}{\partial x^1}$; $\lambda'_r = \varphi \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^r}$.
2.7. $a'^1_1 = a^1_1 - a^2_1 - 2x'^3 a^3_1$, $a'^2_1 = 2x'^1 a^2_1 + 4x'^1 x'^3 a^3_1$, $a'^3_1 = 2x'^1 a^3_1$.
2.20.
а) $(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial z})$, б) $(\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}, \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \dfrac{1}{r \sin\theta}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi})$, $\rho = x^1, \varphi = x^2$, $z = x^3$.

а)

$$\bar{A}_{rs} = \begin{pmatrix} A_{\rho\rho} & \rho^{-1}A_{\rho\varphi} & A_{\rho z} \\ \rho^{-1}A_{\varphi\rho} & \rho^{-2}A_{\varphi\varphi} & \rho^{-1}A_{\varphi z} \\ A_{z\rho} & \rho^{-1}A_{z\varphi} & A_{zz} \end{pmatrix}$$

б)

$$\bar{A}_{rs} = \begin{pmatrix} A_{rr} & r^{-1}A_{r\theta} & (r\sin\theta)^{-1}A_{r\varphi} \\ r^{-1}A_{\theta r} & r^{-2}A_{\theta\theta} & (r^2\sin\theta)^{-1}A_{\theta\varphi} \\ (r\sin\theta)^{-1}A_{\varphi r} & (r^2\sin\theta)^{-1}A_{\varphi\theta} & (r^2\sin^2\theta)^{-1}A_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

2.21.
$\lambda_1 = -1, \quad (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ 0);$
$\lambda_2 = \ \ 0, \quad (0, \ 0, \ 1);$
$\lambda_3 = \ \ 1, \quad (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ 0).$

3. Ковариантное дифференцирование

3.1. Отличные от нуля символы Кристоффеля есть:
а) $\Gamma_{2,21} = \Gamma_{2,12} = x^1$, $\Gamma_{1,22} = -x^1$, $\Gamma^1_{22} = -x^1$, $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = 1/x^1$;

1.21. В точке P, сферические координаты которой ($x^1 = 1$, $x^2 = \pi/4$, x^3), задан вектор

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^3.$$

Найти ортогональные проекции вектора $\mathbf{A}$ на направления базисных векторов $\mathbf{e}_i$ сферической системы координат.

§2. Тензорная алгебра.

2.1. Найти составляющие объектов: $\delta^{rst}_{mst} = e^{rst}e_{mst}$, δ^{rst}_{rst} .
2.2. Пусть a^r_s — объект второго порядка. Вычислить $e_{ijk}a^i_1 a^j_2 a^k_3$, $e^{ijk}a^1_i a^2_j a^3_k$.
2.3. Определить составляющие объектов: а) $e_{ijk}a^i_r a^j_s a^k_t$, б) $e^{ijk}a^r_i a^s_j a^t_k$.
2.4. Пусть a_r – составляющие ковариантного векторного поля в декартовой ортогональной системе координат. Найти составляющие векторного поля в цилиндрической системе координат.
2.5. Пусть составляющие контравариантного вектора λ^r в системе координат x^r есть $(\varphi(x), 0, 0)$, где $\varphi(x)$ скалярная функция точки. Найти составляющие этого вектора в другой системе координат $x'^r = x'^r(x)$. Найти новые составляющие, если эта же совокупность величин образует ковариантный вектор.
2.6. Ковариантный тензор второго порядка в системе координат x^r задан в виде

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти составляющие этого тензора в системе координат x'^r, если преобразование координат имеет вид

$$x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2 - x^3, \quad x'^3 = x^2 + x^3 .$$

§1. Криволинейные координаты в евклидовом пространстве

1.1. Найти координатные поверхности: а) цилиндрической системы координат

$$y^1 = x^1 \cos x^2, \qquad y^2 = x^1 \sin x^2, \qquad y^3 = x^3;$$

б) сферической системы координат

$$y^1 = x^1 \sin x^2 \cos x^3, \quad y^2 = x^1 \sin x^2 \sin x^3, \quad y^3 = x^1 \cos x^2,$$

y^i – декартовы ортогональные координаты ($i = 1, 2, 3$).

1.2. Эллиптические координаты задаются в виде

$$\begin{aligned} y^1 &= \left\{ \frac{(x^1 - a)(x^2 - a)(x^3 - a)}{(b - a)(c - a)} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ y^2 &= \left\{ \frac{(x^1 - b)(x^2 - b)(x^3 - b)}{(c - b)(a - b)} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ y^3 &= \left\{ \frac{(x^1 - c)(x^2 - c)(x^3 - c)}{(a - c)(b - c)} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $a > b > c$, и удовлетворяют неравенствам

$$x^1 > a > x^2 > b > x^3 > c.$$

Показать, что x^1–поверхности – эллипсоиды , x^2–поверхности есть однополостные гиперболоиды и x^3–поверхности – двухполостные гиперболоиды и все координатные поверхности принадлежат семейству

$$\frac{(y^1)^2}{x - a} + \frac{(y^2)^2}{x - b} + \frac{(y^3)^2}{x - c} = 1,$$

Литература

1. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986.
2. *Мак-Коннел А.Д.* Введение в тензорный анализ. М.: Физматгиз, 1963.
3. *Сокольников И* Тензорный анализ. М.: Наука, 1971.
4. *Кочин Н.Е.*Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.
5. *Акивис М.А., Гольдберг В.В.* ЗТензорное исчисление. М.: Наука, 1969.
6. *Мэтьюз Дж., Уокер Р.* Математические методы физики. М.: Наука, 1974.

Учебное издание

ЗАДАЧИ ПО ТЕНЗОРНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Бухбиндер
Геннадий Львович

Санитарно-гигиенический сертификат №
Редактор *???*
Технический редактор *Н.С. Серопян*
Дизайн обложки *???*

Подписано в печать ??? Формат 60×84 1/16.
Печ. л. ???. Усл. печ. л. ??. Уч.-изд. л. ??. Тираж ??экз. Заказ
Издательство Омского государственного университета
644077, Омск-77, пр. Мира, 55а

Содержание