ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО

Г.Л. Бухбиндер

Задачи по общей физике

Механика. Молекулярная физика и термодинамика

Учебно-методическое пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО ОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2017

УДК 530.1

Рекомендовано к изданию
редакционно-издательским советом ОмГУ
Рецензенты:
доктор. ф.-м.н, профессор Г.И. Косенко (ОАБИИТ)
канд. ф.-м.н., доцент С.А. Сычев (ОмГУ)

Задачи по общей физике Механика. Термодинамика и молекулярная физика: учебно-методическое пособие / Г.Л. Бухбиндер – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2017. – 69с.

Данное методическое пособие содержит задачи из разделов "Механика, термодинамика и молекулярная физика"для решения на практических занятиях, а также для самостоятельной работы студентов.

Для студентов нефизических спе6циальностей ОмГУ.

УДК 530.1

ISBN

Содержание

1. Кинематика материальной точки

Радиус-вектор. Вектор, идущий из фиксированного начала отсчета в некоторую точку пространства называется радиусом - вектором этой точки. Положение частицы относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

где x, y, z - координаты частицы, а $\boldsymbol{e}_x$ $\boldsymbol{e}_y$ $\boldsymbol{e}_z$ - единичные векторы вдоль координатных осей.

Вектор перемещения. Если частица движется так, что ее радиус-вектор изменяется от $\boldsymbol{r}_1$ до $\boldsymbol{r}_2$, то вектор

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

называется перемещение частицы или приращением радиус-вектора.

Средняя и мгновенная скорости. Средняя скорость частицы в течение интервала Δt есть

$$\boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\,,$$

где $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ перемещение точки. Когда Δt стремится к нулю средняя скорость стремится к предельному значению - мгновенной скорости в момент t, равной

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,.$$

Вектор скорости может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z\,,$$

где $\upsilon_x = \dot{x}$, $\upsilon_y = \dot{y}$, $\upsilon_z = \dot{z}$. Скорость направлена вдоль касательной в той точке траектории, где находится частица, а ее величина равна

$$\upsilon = |\boldsymbol{\upsilon}| = \frac{ds}{dt}\,,$$

где s - длина пути пройденного вдоль траектории.

Ускорение.

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}\,,$$

Ускорение также может быть представлено в векторном виде как

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z\,,$$

где $a_x = \dot{\upsilon}_x$, $a_y = \dot{\upsilon}_y$, $a_z = \dot{\upsilon}_z$.

Путь пройденный точкой. Путь, пройденный вдоль произвольной траектории:

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \upsilon dt\,,$$

где $\upsilon = |\boldsymbol{\upsilon}|$ - модуль скорости.

Нормальное и тангенциальное ускорение.

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} \qquad a_\tau = \dot{\upsilon}$$

Движение точки по окружности. Угловая скорость и угловое ускорение точки при движении по окружности:

$$\omega = \dot{\varphi} \qquad \varepsilon = \dot{\omega}\,,$$

где φ - угол между радиусом точки, исходящим из центра окружности и некоторым фиксированным направлением (например, осью x). При равноускоренном вращении угол и угловая скорость меняются по закону

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0 \qquad \omega = \epsilon t + \omega_0\,,$$

где φ_0, ω_0 - начальные значения угла и угловой скорости.

При равномерном движении по окружности радиуса R период T кругового движения $T = 2\pi/\omega$. Частота кругового движения (количество оборотов в единицу времени) $\nu = \omega/2\pi$.

Решение задач

1.1. Первую половину времени своего движения автомобиль двигался со скоростью $\upsilon_1 = 80$км/ч, а вторую половину времени - со скоростью $\upsilon_2 = 40$км/ч. Какова средняя скорость $\bar{\upsilon}$ движения автомобиля?

Решение: Средняя скорость равна $\bar{\upsilon} = \dfrac{s}{t}$, где s пройденный путь, а t - затраченное на перемещение время. В данном случае

$$s = \upsilon_1\frac{t}{2} + \upsilon_2\frac{t}{2} = (\upsilon_1 + \upsilon_2)\frac{t}{2}\,.$$

Откуда

$$\bar{\upsilon} = \frac{s}{t} = \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)}{2} = 60\text{км/ч}\,.$$

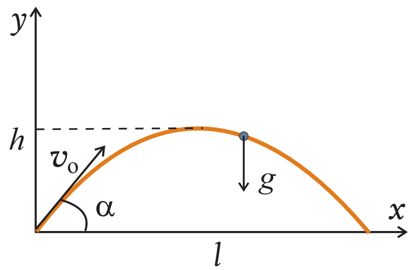

Рис. 1.

1.2. Тело брошено со скоростью υ_0 под углом α к горизонту. На какую высоту h поднимется тело? На каком расстоянии l от места бросания оно упадет на землю? Какое время оно будет в движении? Определить траекторию движения тела.

Решение: Тело движется с постоянным ускорением g направленным вдоль оси y к земли (см. рис. 1). Так как вдоль оси x ускорение отсутствует, то вдоль этой оси тело совершает равномерное движение. Таким образом, закон движения имеет вид

$$x = \upsilon_0 t\cos\alpha \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + \upsilon_0 t\sin\alpha\,. \tag{1}$$

При этом скорости вдоль осей равны

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_y = \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \, .$$

Если $\mathbf{r} = (x\,, y)$ - радиус-вектор точки, а $\boldsymbol{v} = (v_x\,, v_y)$ - вектор скорости, то два последних равенства можно записать в векторном виде

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t \qquad \boldsymbol{v} = -\mathbf{g}t + \boldsymbol{v}_0\,,$$

где $\boldsymbol{v}_0$ - вектор начальной скорости, а $\mathbf{g} = (0\,, g)$.

Найдем момент времени t_1, в который тело будет находится на максимальной высоте. Так как в точке максимального подъема $v_y = 0$, то получим

$$-gt_1 + v_0 \sin\alpha = 0 \quad \text{и} \quad t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\,.$$

Откуда

$$h = y(t_1) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\,.$$

Найдем момент времени t_2, в который тело упадет на землю, из условия $y = 0$,

$$y = -\frac{gt_2^2}{2} + v_0 t_2 \sin\alpha = 0\,.$$

Откуда $t_2 = 2t_1 = (2v_0 \sin\alpha)/g$ и

$$l = x(t_2) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha\,.$$

Уравнение траектории получим исключая время t из равенств (1). В результате получим

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2\,.$$

Это уравнение является уравнением параболы.

1.3. Камень брошен горизонтально со скоростью $v_x = 15$м/с. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения камня через $t = 1$с после начала движения.

Решение: Ускорение, которым обладает камень равно g. Из рис. 2 видно, что $a_n = g\cos\varphi$, $a_\tau = g\sin\varphi$. Тригонометрические функции можно найти из треугольника построенного на скоростях:

$$\cos\varphi = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{v_y}{v} = \frac{gt}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Откуда $a_n = g\dfrac{v_x}{v} = 8,2$м/с, $a_\tau = g\dfrac{gt}{v} = 5,4$м/с .

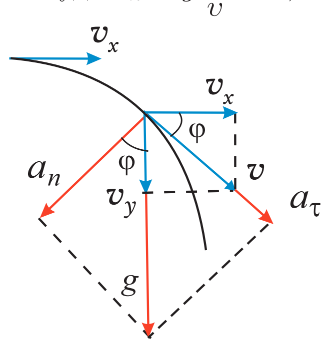

Рис. 2.

1.4. Колесо, вращаясь равноускоренно из состояния покоя, достигло угловой скорости $\omega = 20$рад/с через $N = 10$ оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса ε.

Решение: При равноускоренном вращении из состояния покоя угол поворота колеса (точки на ободе) меняется по закону $\varphi = \varepsilon t^2/2 = \omega t/2$ где $\omega = \varepsilon t$. Пусть в момент t_1 колесо совершило N оборотов. Тогда

$$2\pi N = \frac{\omega t_1}{2} \qquad \omega = \varepsilon t_1\,.$$

Выражая из второго равенства t_1 и подставляя в первое, получим

$$\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi N}\,.$$

Задачи

1.5. Первую половину своего пути автомобиль двигался со скоростью $v_1 = 80$км/ч, а вторую половину пути - со скоростью

$v_2 = 40$км/ч. Какова средняя скорость $\bar{v}$ движения автомобиля?
Ответ: $\bar{v} = 53,3$км/ч.

1.6. Найти скорость катера, движущегося по реке (относительно берега), если: а) катер движется по течению; б) против течения; в) под углом $\alpha = 90°$ к течению. Скорость течения реки $u = 1$м/с, скорость катера относительно воды $v_0 = 2$м/с.
Ответ: а)3м/с; б)1м/с; в)$\sqrt{5}$м/с.

1.7. Самолет летит от пункта A до пункта B, расположенного на расстоянии $l = 300$км к востоку. Найти продолжительность полета t, если: а) ветра нет; б) ветер дует с юга на север; в) ветер дует с запада на восток. Скорость самолета относительно воздуха $v = 600$км/ч, скорость ветра $u = 20$м/с.
Ответ: а)0,5ч; б)0,504ч; в)26,8.мин

1.8. Катер, двигаясь вниз по реке, обогнал плот в пункте A. Через $\tau = 60$мин после этого он повернул обратно и затем встретил плот на расстоянии $l = 6,0$км ниже пункта A. Найти скорость течения, если при движении в обоих направлениях мотор катера работал в одном режиме.
Ответ: $v = l/2\tau = 3$км/ч.

1.9. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через время $t = 3$с. Какова начальная скорость v_0 тела и на какую высоту h оно поднялось?
Ответ: $v_0 = gt/2 = 14,7$м/с; $h = gt^2/8 \approx 11$м.

1.10. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно - вертикально вверх, другое - под углом $\theta = 60°$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела $v_0 = 25$м/с. Найти расстояние между телами через $t = 1,70$с.
Ответ: $l = v_0\sqrt{2(1-\sin\theta)} == 22$м.

1.11. С аэростата, находящегося на высоте $h = 300$м, упал камень. Через какое время t камень достигнет земли, если: а) аэростат поднимается со скоростью $v = 5$м/с; б)аэростат опускается со скоростью $v = 5$м/с; в) аэростат неподвижен.
Ответ: а) $t = (v+\sqrt{v^2+2gh})/g$ = 8,4с; б)$t = (-v+\sqrt{v^2+2gh})/g$ = 7,3с; в) $t = \sqrt{2h/g}$ = 7,8с.

1.12. Начальное значение скорости равно $\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z$ (м/с), где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ - орты прямоугольной системы координат, конечное - $\boldsymbol{v}_2 = 2\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y + 6\mathbf{e}_z$ (м/с). Найти: а) приращение скорости $\Delta\boldsymbol{v}$; б) модуль приращения скорости $|\Delta\boldsymbol{v}|$; в)приращение модуля скорости Δv.
Ответ: а)$\Delta\boldsymbol{v} = (1,1,1)$; б) 1,73м/с; в)1,57м/с.

1.13. Частица покидает начало координат с начальной скоростью $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{e}_x$(м/с) и постоянным ускорением $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{e}_x - 0,5\boldsymbol{e}_y$(м/с^2). Найти скорость и радиус-вектор частицы, когда она достигнет максимального значения своей координаты x.
Ответ: $\boldsymbol{v} = -1,5\boldsymbol{e}_y$(м/с); $\boldsymbol{r} = 4,5(\boldsymbol{e}_x - 0,5\boldsymbol{e}_y)$(м/с^2).

1.14. Частица движется равномерно по часовой стрелке по окружности радиуса R, делая за время τ один оборот. Окружность лежит в координатной плоскости xy, причем центр окружности находится в начале координат. В момент $t = 0$ частица находится в точке с координатами $x = 0, y = R$. Найти вектор средней скорости $\boldsymbol{v}_{\text{ср}}$ точки за промежуток времени; а) от 0 до $\tau/4$; б) от 0 до $\tau/2$; в) от $\tau/4$ до $3\tau/4$.
Ответ: а)$(4R/\tau)(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$; б) $(-4R/\tau)\mathbf{e}_y$; в)$-(4R/\tau)\mathbf{e}_x$.

1.15. Радиус-вектор частицы определяется выражением $\mathbf{r} = 3t^2\mathbf{e}_x + 4t^2\mathbf{e}_y + 7\mathbf{e}_z$ (м). Вычислить: а) путь s, пройденный частицей за первые 10 сек движения; б) модуль перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$ за тоже время; в) объяснить полученные результаты.
Ответ: а)$s = 500$м; б) $|\Delta\mathbf{r}| = 500$м.

1.16. Радиус-вектор частицы изменяется со временем по закону $\mathbf{r} = 3t^2\mathbf{e}_x + 2t\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$ (м). Найти: а) скорость $\boldsymbol{v}$ и ускорение $\boldsymbol{a}$ частицы; б) модуль скорости v в момент $t = 1$с; в) приближенное значение пути s, пройденного частицей за 11с движения.
Ответ: а)$\boldsymbol{v} = 6t\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$, $\boldsymbol{a} = 6\mathbf{e}_x$; б) 6,3м/с.

1.17. Частица движется со скоростью $\boldsymbol{v} = at(2\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z)$, где a - некоторая постоянная. Найти: а) модуль скорости v частицы в момент $t = 1$с; б) ускорение частицы $\boldsymbol{a}$ и его модуль; в) путь s, пройденный частицей с момента $t_1 = 2$с до момента $t_2 = 3$с.
Ответ: а) $v = a\sqrt{29}$; б)$\boldsymbol{a} = a(2\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z)$, $|\boldsymbol{a}| = a\sqrt{29}$;

в) $s = 5a\sqrt{29}/2$.

1.18. Камень брошенный горизонтально, через $t = 0,5$с после начала движения имел скорость υ, в 1,5 раза большую скорости υ_x в момент бросания. С какой скоростью υ_x был брошен камень.
Ответ: 4,47 м/с.

1.19. Камень брошен горизонтально со скоростью $\upsilon_x = 10$м/с. Найти радиус кривизны R траектории камня через $t = 3c$ после начала движения.
Ответ: $R = \dfrac{1}{g\upsilon_x}\left[\upsilon_x^2 + (gt)^2\right]^{3/2} = 305$м.

1.20. Тело брошено со скоростью $\upsilon_0 = 14,7$м/с под углом $\alpha = 30^o$ к горизонту. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения тела через $t = 1,25$с после начала движения.
Ответ: $a_n = 9,15$ м/с^2, $a_\tau = 3,52$м/с^2.

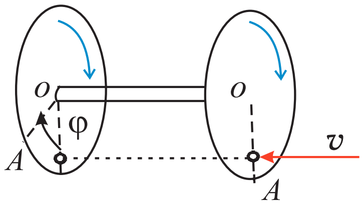

Рис. 3.

1.21. Тело брошено со скоростью $\upsilon = 10$м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Найти радиус кривизны R траектории тела, через время $t = 1$с после начала движения.
Ответ: $R \approx 6,3$м.

1.22. Тело брошено со скоростью υ_0 под углом α к горизонту. Найти скорость υ_0 и угол α, если известно, что высота подъема тела $h = 3$м и радиус кривизны траектории тела в верхней точке траектории R.
Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{2h}{R}} = \sqrt{2}$, $\upsilon_0 = \dfrac{\sqrt{gR}}{\cos\alpha}$; $\upsilon_0 \approx 9,35$м/с.

1.23. Ось с двумя дисками, расположенными на расстоянии $l = 0.5$ м друг от друга, равномерно вращается с частотой $\nu = 1600$ об/мин (рис. 3). Пуля, летящая вдоль оси, пробивает оба диска; при этом отверстие от пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол $\varphi = 12°$. Найти скорость пули υ.
Ответ: $\upsilon = 2\pi\nu l/\varphi = 419$м/с.

1.24. Колесо, вращаясь равноускоренно из состояния покоя, до-

стигло угловой скорости $\omega = 20$рад/c через $N = 10$об после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса ε.
Ответ: $\varepsilon = \omega^2/4\pi N = 3,2$рад/^{2}.

1.25. Под каким углом к горизонту надо бросить шарик , чтобы: а) радиус кривизны его траектории был в $\eta = 8$ раз больше, чем в вершине; б) центр кривизны вершины траектории находился на земной поверхности?
Ответ: а) $\cos\alpha = 1/\eta^{1/3}$; б)$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

2. Динамика

Первый закон Ньютона (закон инерции). Если тело не подвержено действию других тел, то существуют такие системы отсчета, относительно которых тело или покоится или равномерно и прямолинейно движется. Такие системы отсчета называются инерциальными. Системы отсчета, в которых первый закон Ньютона не выполняется называются неинерциальными.

Второй закон Ньютона. Сила $\boldsymbol{F}$, действующая на тело с массой m и имеющим ускорение $\boldsymbol{a}$ относительно инерциальной системы отсчета, равна

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

или в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$F_x = ma_x \qquad F_y = ma_y \qquad F_z = ma_z\,.$$

Второй закон Ньютона также записывается в форме ***уравнения движения*** (основное уравнение динамики)

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

или в проекциях

$$m\ddot{x} = F_x \qquad m\ddot{y} = F_y \qquad m\ddot{z} = F_z\,.$$

Проекции уравнения движения на касательную и нормаль к траектории имеют вид

$$m\dot{v} = F_\tau \qquad \frac{mv^2}{R} = F_n\,,$$

где F_τ, F_n - проекции силы.
Третий закон Ньютона. Если тело 1 действует на тело 2 с силой $\boldsymbol{F}_{21}$, то сила с которой тело 2 действует на тело 1 равна

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$$

Сила тяжести. Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением, которое называется ускорением свободного движения и обозначается как $\boldsymbol{g}$.

В системе отсчета, связанной с Землей на всякое тело действует сила

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}\,,$$

называемая силой тяжести.
Реакция на нормальное давление. Если тело покоится на опоре или подвешено, то со стороны подвеса или опоры на тело действует сила, называемая реакцией опоры или подвеса. Реакция на нормальное давление - перпендикулярна поверхности опоры.
Вес тела. Весом тела называется сила $\boldsymbol{W}$, с которой тело действует на опору (или подвес). Если $\boldsymbol{N}$ - реакция опоры, то $\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{N}$. По величине вес равен модулю $N = |\boldsymbol{N}|$.
Сила трения. Когда внешняя сила стремится переместить тело по некоторой поверхности, со стороны поверхности возникает сила трения, препятствующая движению. Эта сила лежит в касательной плоскости к трущимся поверхностям и направлена против внешней силы. Если тело остается неподвижным, то сила трения называется силой трения покоя. Максимальное значение силы трения покоя равно

$$(F_{\text{тр п}})_{max} = \mu_0 N\,,$$

где N - сила нормального давления, прижимающая тело к поверхности, μ_0 - коэффициент трения покоя. Если внешняя сила превысит это значение, то тело придет в движение

Если тело скользит по поверхности, то сила трения называется силой трения скольжения и равна

$$F_{\text{тр}} = \mu N\,.$$

Коэффициент μ называется коэффициентом трения скольжения. Сила трения скольжения направлена противоположно направлению движения.
Внутреннее трение. При движении тела в жидкости или газе возникают силы, тормозящие движение тело. Эти силы, называемые также силами трения, при небольших скоростях тела v описываются соотношением

$$\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = -k\boldsymbol{v}\,,$$

где k - коэффициент трения.

Решение задач

2.1. Какой массы Δm балласт надо сбросить с равномерно опускающегося аэростата, чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Масса аэростата с балластом $m = 1600$ кг, подъемная сила аэростата $F = 12$ кН. Считать силу сопротивления $F_\text{с}$ воздуха одной и той же при подъеме и спуске.

*Решение***:** Так как аэростат движется равномерно, то равнодействующая всех сил, действующих на него, равна нулю. Пусть $F_\text{с}$ - сила сопротивления. Тогда в направлении движения имеем, соответственно, для спуска и подъема

$$mg - F_c - F = 0$$
$$F - (m - \Delta m)g - F_c = 0\,,$$

где Δm - масса балласта. Складывая уравнения, получим

$$\Delta m = 2\left(m - \frac{F}{g}\right) = 752\text{кг}\,.$$

2.2. Машина Атвуда. Два груза с массами $m_1 = 2$кг и $m_2 = 1$кг соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок (рис. 4). Найти ускорение a, с которым движутся грузы, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Решение: Запишем второй закон Ньютона для произвольного малого элемента нити массы ΔM : $\Delta M a = T_2 - T_1$ (см. рис.4), где T_1 и T_2 силы, с которыми оставшиеся части нити действуют на выбранный элемент. Поскольку нить невесома $\Delta M \to 0$, то $T_1 = T_2$, т.е сила натяжения во всех точках нити одинакова. Поскольку нить нерастяжима, то ускорения грузов также одинаковы. Запишем второй закон Ньютона для грузов

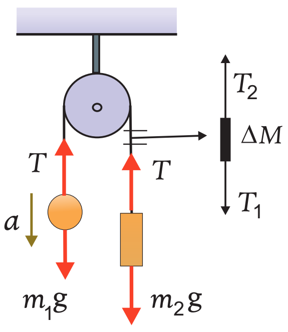

Рис. 4.

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T \\ m_2 a &= T - m_2 g\,. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений относительно a и T, получим

$$\begin{aligned} a &= \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \\ T &= \frac{2 g m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,. \end{aligned}$$

Подставляя численные данные, получим $a = 3,27$м/сек^2, $T = 13$Н.

2.3. Невесомый блок укреплен на конце стола (рис. 5). Тела массы $m_1 = m_2 = 1$кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения тела о стол $k = 0,1$. Найти ускорение a, с которым движутся тела, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Решение: Пусть тело 1 движется вертикально вниз. Запишем второй закон Ньютона для обоих тел в направлении их движения

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T \\ m_2 a &= T - F_{\text{тр}}\,. \end{aligned}$$

Так как второе тело в вертикальном направлении не перемещается, то сила тяжести уравновешивается реакцией опоры $N = mg$. Откуда для силы трения находим $F_{\text{тр}} = -kN = -kmg$. Складывая два последних уравнения, найдем ускорение

$$a = g\frac{m_1 - k m_2}{m_1 + m_2} = 4,4\text{м/с}^2\,.$$

Подставляя это выражение, например, в первое уравнение, получим

$$T = \frac{m_1 m_2 (1 + k)}{m_1 + m_2} = 5,4\text{Н}\,.$$

Задачи

2.4. Аэростат массы $m = 250$кг начал опускаться с ускорением $a = 0.2$м/с^2. Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Силой сопротивления пренебречь.

Ответ: $\Delta m = 2ma/(a + g)$

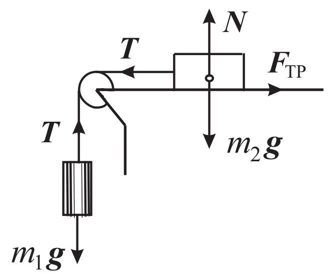

Рис. 5.

2.5. К нити подвешен груз массы $m = 1$кг. Найти силу натяжения нити T, если нить с грузом: а)поднимать с ускорением $a = 5$м/с^2; б) опускать с тем же ускорением.

Ответ: а) $T = 14{,}8$Н; б)T= $4,8$Н.

2.6. Тело с массой $m = 0,5$кг движется прямолинейно, причем зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, где $C = 5$м/с^2 и

$D = 1$м/с^3. Найти силу силу F, действующую на тело в конце первой секунды движения.
Ответ: $F = 2$Н.

2.7. На автомобиль массой $m = 1$т во время движения действует сила трения с коэффициентом трения $\mu = 0,1$. Какова должна быть сила тяги F, развиваемая мотором автомобиля, чтобы автомобиль двигался: а) равномерно; б) с ускорением $a = 2$м/с.
Ответ: а) $f = 0,98$кН; б)$F = 2,98$кН.

2.8. На автомобиль массой $m = 1$т во время движения действует сила трения с коэффициентом трения $\mu = 0,1$. Найти силу тяги F, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью: а) в гору с уклоном 1м на каждые 25м пути; б) под гору с тем же уклоном.
Ответ: а) $F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 1,37$кН, α - угол уклона; б)$F = mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) = 590$Н.

2.9.. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Пройдя путь $s = 36,4$см, тело приобретает скорость $v = 2$м/с. Найти коэффициент трения μ тела о плоскость.
Ответ: $\mu = \dfrac{2gs\sin\alpha v^2}{2gs\cos\alpha} = 0,2$.

2.10. Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости , составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Тела массы $m_1 = m_2 = 1$кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которым движутся тела, и силу натяжения нити T. Коэффициент трения тела о наклонную $k = 0,1$.
Ответ: $a = g(1 - \sin\alpha - k\cos\alpha)/2 = 2,02$м/с^2; $T = m(g - a) = 7,78$н.

2.11. Брусок массы m тянут за нить, составляющей угол α с направлением движения, так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ. Найти угол α, при котором натяжение нити F минимально. Чему оно равно?
Ответ: $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu$, $F = \mu mg/\sqrt{1+\mu^2}$.

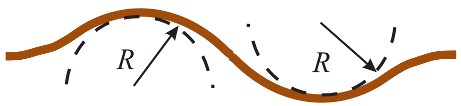

Рис. 6.

2.12. Автомобиль движется с постоянной скоростью по круговому холму, а затем по круговой впадине (рис. 6). На вершине холма на водителя со стороны сидения действует сила реакции на нормальное давление, равная нулю. Масса водителя $m = 70$кг. Найти силу реакции сидения, когда автомобиль будет проходить дно впадины.
Ответ: $N = 2mg = 1,37$кН.

2.13. Самолет делает "мертвую петлю"радиуса $R = 500$м с постоянной скоростью $v = 360$км/ч. Найти вес летчика массы $m = 70$кг в нижней, верхней и средней точках петли.
Ответ: 2,1 кН, 0,7 кН, 1,5 кН.

3. Законы сохранения

Закон сохранения импульса. Для замкнутой системы материальных точек выполняется закон сохранения полного импульса системы

$$\boldsymbol{P} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots = \mathrm{const}\,.$$

Если система не замкнута, но проекция результирующей внешней силы на некоторое направление l равна нулю, то будет сохраняться проекция полного импульса на данное направление

$$P_l = \mathrm{const}\,.$$

Работа постоянной силы на прямолинейном пути. Работа постоянной силы $\boldsymbol{F}$ при перемещении частицы на расстояние s

вдоль прямолинейного пути $\boldsymbol{s}$ равна

$$A = Fs\cos\theta = F_\tau s = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}\,,$$

где θ - угол между вектором силы и направлением перемещения $\boldsymbol{s}$, а $F_\tau = F\cos\theta$ - проекция силы на направление перемещения.

Работа силы на криволинейной траектории. Если частица находится в силовом поле, то работа сил поля, при перемещении частицы из положения 1 в положение 2 равна

$$A = \int\limits_{s_1}^{s_2} F_\tau(s)ds\,,$$

где s - расстояние вдоль траектории, а F_τ - проекция силы, действующей на частицу в произвольной точке траектории, на касательную в этой точке, s_1 и s_2 соответствуют начальной и конечной точкам пути.

Работа упругой силы. Если один из концов пружины закреплен, а второй деформируется вдоль некоторой оси с постоянной скоростью, то работа, совершаемая при деформации пружины, подчиненной закону Гука, равна

$$A = \frac{kx^2}{2}\,,$$

где $x = l - l_0$ - удлинение пружины, l_0 - недеформированная длина пружины, l - длина растянутой (сжатой) пружины.

Мощность. Работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью силы

$$P = \frac{dA}{dt} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\,.$$

Работа и кинетическая энергия. Приращение кинетической энергии ΔT частицы при ее перемещении из некоторого положения 1 в некоторое другое положение 2 равно работе A результирующей силы совершенной при таком перемещении

$$\Delta T = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A$$

Консервативные силы. Сила (силовое поле), действующая на частицу, называется консервативной, если работа совершаемая этой силой при перемещении частицы из одного произвольного положения в другое, не зависит от того по какой траектории происходило перемещение. Для консервативных сил эта работа зависит только от начального и конечного положения частицы. Работа консервативных сил на любом замкнутом пути равна нулю.

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия частицы U_P в произвольной точке P в поле консервативной силы есть работа A_{PO} сил поля при перемещении частицы из точки P в некоторую фиксированную точку пространства O, в которой потенциальная энергия принимается равной нулю

$$U_P = A_{PO}\,,$$

В поле консервативной силы имеет место равенство

$$U_1 - U_2 = A_{12}\,,$$

где A_{12} - работа сил поля при перемещении частицы из точки 1 в точку 2.

Связь между силой и потенциальной энергией.

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\,.$$

Закон сохранения энергии. Если частица движется в стационарном консервативном силовом поле, то выполняется закон сохранения энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} + U = \mathrm{const}\,,$$

где E называется полной энергией.

В замкнутой механической системе выполняется закон сохранения энергии

$$E = T + U = \mathrm{const}\,,$$

где T кинетическая энергия системы, а U - потенциальная энергия взаимодействия частиц.

Приращение полной механической энергии. Если помимо консервативных сил, на частицу действует неконсервативные силы, то при перемещении частицы ее полная энергия не сохраняется и ее приращение (с учетом знака) равна работе результирующей неконсервативных сил на данном перемещении

$$\Delta E = A_i \,.$$

Центр масс. Центр масс (центр инерции) системы n частиц определяется как точка, координаты которой равны

$$X = \frac{1}{m}\sum m_i x_i \qquad Y = \frac{1}{m}\sum m_i y_i \qquad Z = \frac{1}{m}\sum m_i z_i$$

или

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{m}\sum m_i \boldsymbol{r}_i \,,$$

где $m = \sum m_i$ - полная масса системы.

Если $\boldsymbol{a}$ - ускорение ц.м., то

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \,,$$

где $\boldsymbol{F}$ - равнодействующая всех внешних сил.

Момент силы. Момент силы $\boldsymbol{N}$ относительно некоторой фиксированной точки O есть вектор, определяемый как векторное произведение

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{F}] \,,$$

где $\boldsymbol{F}$ - сила действующая на частицу, а $\boldsymbol{r}$ - радиус- вектор частицы относительно точки O. Величина $\boldsymbol{N}$ есть

$$N = rF\sin\alpha = lF \,,$$

где α есть угол между $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}$ и $l = r\sin\alpha$ - плечо силы - длина перпендикуляра, опущенного из O на направление действия силы. Вектор $\boldsymbol{N}$ перпендикулярен плоскости векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}$ и его направление определяется правилом правой руки.

Момент импульса. Момент импульса частицы (угловой момент) $\boldsymbol{M}$ относительно некоторой фиксированной точки O есть вектор, определяемый как векторное произведение

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{p}] = [\boldsymbol{r},\, m\boldsymbol{v}] \,,$$

где $\boldsymbol{p}$ - импульс частицы, а $\boldsymbol{r}$ - радиус- вектор частицы относительно точки O. Величина $\boldsymbol{M}$ есть

$$M = rp\sin\alpha = lp \,,$$

где α есть угол между $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$ и $l = r\sin\alpha$ - плечо импульса - длина перпендикуляра, опущенного из O на направление импульса. Вектор $\boldsymbol{M}$ перпендикулярен плоскости векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$ и его направление определяется правилом правой руки.

Производная от момента импульса частицы равна моменту силы

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \boldsymbol{N} \,.$$

Закон сохранения момента импульса. В замкнутой механической системе сохраняется полный момент импульса системы

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \cdots + \boldsymbol{M}_n = \text{const} \,,$$

где $\boldsymbol{M}_i$ - момент импульса i-й частицы.

Решение задач

3.1. Автомобиль массы $m = 2$т равномерно движется в гору с уклоном 4м на каждые 100м пути. Коэффициент трения $k = 0,08$. Найти работу A, совершаемую двигателем автомобиля на пути $s = 3$км и мощность P развиваемую двигателем, если известно, что весь путь был пройден за время $t = 4$мин.

Решение: Пусть двигатель развивает силу тяги F (рис. 7). Тогда, работа силы тяги равна $A = Fs$. При равномерном движении ускорение равно нулю, поэтому, проектируя все силы на направление движения, получим

$$F = F_{\text{тр}} + mg\sin\alpha\,.$$

Сила трения по величине равна $F_{\text{тр}} = kN$, где N реакция на нормальное давление, равное

$$N = mg\cos\alpha\,.$$

Поэтому

$$F = mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)\,.$$

Откуда

$$A = Fs = mgs(\sin\alpha + k\cos\alpha)\,.$$

Учитывая, что $\sin\alpha = 0,04$ и $\cos\alpha = \sqrt{1-(0,04)^2} = 0,999$, находим $A = 7$МДж. Откуда для мощности находим $P = \dfrac{A}{t} = 29,2$кВт.

3.2. С башни высотой $h = 25$м горизонтально брошен камень со скоростью $v_0 = 15$м/с. Найти кинетическую T и потенциальную U энергии камня через $t = 1$с после начала движения. Масса камня $m = 0,2$кг

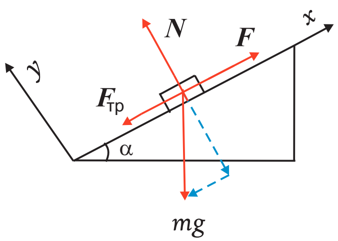

Рис. 7.

Решение: Найдем кинетическую энергию T

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2}\,.$$

Так как в произвольный момент времени времени t $v_x = v_0$ и $v_y = -gt$, то

$$T = \frac{m[v_0^2 + (gt)^2]}{2} = 32,2\text{Дж}\,.$$

Высота камня в момент t определяется координатой $y = h - \dfrac{gt^2}{2}$, поэтому потенциальная энергия равна

$$U = mgy = mg\left(h - \frac{gt^2}{2}\right) = 39,4\text{Дж}\,.$$

3.3. Является ли сила $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{e}_x + 3xy\mathbf{e}_y$ консервативной.

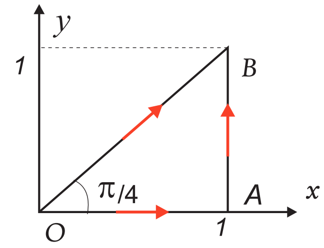

Рис. 8.

Решение: По определению сила $\mathbf{F}$ консервативна, если работа силы на перемещении из одной точки в другую не зависит от пути, вдоль которого происходит перемещение.

Рассмотрим работу силы при перемещении из точки O в точку B вдоль двух путей - OAB и OB в плоскости (xy) (рис. 8). Найдем работу вдоль OAB

$$A_{OAB} = A_{OB} + A_{AB}\,.$$

На отрезке OA $y = 0$, перемещение $ds = dx$ и проекция вектора силы на направление перемещения равна $F_\tau = F_x$. Откуда

$$A_{AO} = \int_O^A F_\tau ds = \int_0^1 F_x dx = \int_0^1 (-x^2)dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}\,.$$

На отрезке AB проекция вектора силы на ось y равна нулю, $F_\tau = F_y = 0$, поэтому $A_{AB} = 0$, откуда получаем

$$A_{OAB} = -\frac{1}{3}\,.$$

Найдем работу вдоль OB. Проекция вектора силы на перемещение вдоль OB равна $F_\tau = F_{OB} = \mathbf{F}\,\mathbf{e}_{OB}$, где $\mathbf{e}_{OB}$ единичный вектор вдоль OB

$$\mathbf{e}_{OB} = \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\,.$$

Так как $\overrightarrow{OB}$ - радиус-вектор точки B, то его проекции равны $\overrightarrow{OB} = (1,\,1,\,0)$ и $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2}$. Тогда везде на OB

$$F_\tau = \mathbf{F}\,\mathbf{e}_{OB} = F_x\frac{1}{\sqrt{2}} + F_y\frac{1}{\sqrt{2}} + F_z\cdot 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^2 - x^2) = 0\,.$$

поскольку на OB $x = y$. Откуда $A_{OB} = 0$. Так как $A_{OAB} \neq A_{OB}$, сила не консервативна.

3.4. Пуля массы $m = 9,5$г, летящая горизонтально, попадает в деревянный блок массы $M = 5,4$кг, висящий на двух длинных нитях, и застревает в нем (см. рис. 9). После этого блок, вращаясь на нитях, поднимается на высоту $h = 6,3$см. а) Найти скорость пули v; б) потерю механической энергии при столкновении.

Решение: а) В данном случае столкновение пули и и блока абсолютно неупругое. Если скорость блока с пулей непосредственно после столкновения обозначить через u, то из закона сохранения импульса будем иметь

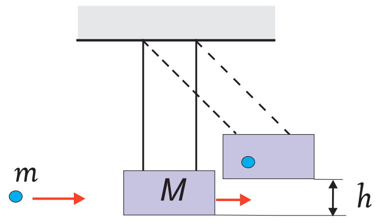

Рис. 9.

$$mv = (m+M)u\,,$$

откуда

$$u = \frac{mv}{m+M}\,.$$

После столкновения выполняется закон сохранения энергии.Так как непосредственно после столкновения полная механическая энергия равна кинетической энергии блока с пулей, а на высоте h потенциальной энергии в поле силы тяжести, то

$$\frac{1}{2}(m+M)u^2 = (m+M)gh$$

или, подставляя выражение для u,

$$\frac{m^2v^2}{2(m+M)} = (m+M)gh\,.$$

Откуда находим для скорости пули

$$v = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh} = 633\text{м/с}.$$

б) Потеря механической энергии равна разности кинетической энергии блока с пулей непосредственно после столкновения и начальной энергией пули

$$\Delta E = \frac{m^2v^2}{2(m+M)} - \frac{mv^2}{2} = -\Big(1 - \frac{m}{m+M}\Big)\frac{mv^2}{2} = -1,9\text{кДж}\,.$$

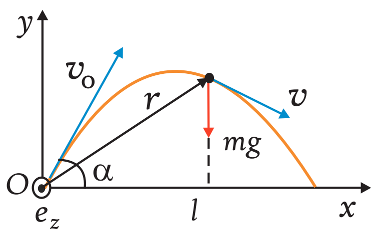

Рис. 10.

3.5. Материальная точка массы m брошена под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 (рис. 10). Траектория полета частицы лежит в плоскости $x\,y$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти в произвольный момент времени t: а) момент $\mathbf{N}$ силы, действующей на частицу, относительно точки O; б) момент импульса частицы $\mathbf{M}$ относительно точки O.

Решение: а) Величина момента равна $N = lmg$, где l - плечо силы тяжести, равное длине пути точки вдоль оси x, т.е. $x = v_0 t\cos\alpha$. Откуда $N = mgv_0 t\cos\alpha$. Вектор $\mathbf{N}$ направлен за чертеж, поэтому

$$\mathbf{N} = -mgv_0 t\cos\alpha\,\mathbf{e}_z\,,$$

где $\mathbf{e}_z$ - орт вдоль оси z.

б) Момент импульса равен $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}]$, где

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{v}_0 t - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 - \mathbf{g}t$$

и $\mathbf{g} = (0,\,g)$ (g - ускорение свободно падения). Тогда, используя свойства векторного произведения, получим

$$\mathbf{M} = m[\boldsymbol{v}_0 t - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2,\ \boldsymbol{v}_0 - \mathbf{g}t] = mt^2[\boldsymbol{v}_0,\,\mathbf{g}] + \frac{1}{2}mt^2[\mathbf{g},\,\boldsymbol{v}_0] = \frac{1}{2}mt^2[\boldsymbol{v}_0,\,\mathbf{g}]\,.$$

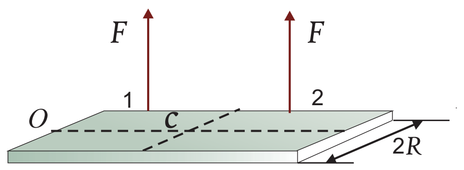

Рис. 11.

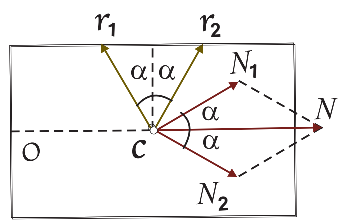

Рис. 12.

Модуль момента равен

$$M = \frac{1}{2} m t^2 v_0 g \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} m g v_0 t^2 \cos\alpha \,.$$

Так как момент направлен за чертеж, то $\mathbf{M} = -\frac{1}{2} m g v_0 t^2 \cos\alpha\, \mathbf{e}_z$.

3.6. К краю однородной пластинки ширины $2R$ перпендикулярно ее плоскости и симметрично относительно центра инерции C приложены две равные силы F (рис. 11) Найти результирующий момент сил.

Решение: Моменты сил, приложенных в точках 1 и 2, лежат в плоскости пластинки (см. рис. 12) и равны $N_1 = N_2 = rF$, где $r_1 = r_2 = r$. Результирующий момент лежит вдоль оси CO и равен по величине $N = 2rF\cos\alpha$. Так как $r\cos\alpha = R$, то $N = 2RF$.

Задачи

3.7. При подъеме груза $m = 2$кг на высоту $h = 1$м сила F совершает работу $A = 78,5$Дж. С каким ускорением поднимается груз?
Ответ: $a = 29,4$м/с^2.

3.8. Какую мощность P развивает двигатель автомобиля массы $m = 1$т, если известно, что автомобиль едет с постоянной скоростью $v = 36$км/ч: а) по горизонтальной дороге; б)в гору с уклоном 5м на каждые 100м пути; в)под гору с тем же уклоном? Коэффициент трения $k = 0,07$.
Ответ: а)$P = 6,9$кВт; б)$P = 11,8$кВт; в)$P = 2$кВт.

3.9. Небольшое тело массы m с постоянной скоростью втащили на горку, действуя силой F, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории (рис. 13). Найти работу этой силы, если высота горки h, длина основания l, коэффициент трения k.
Ответ: $A = mg(h + kl)$.

3.10. Какую работу A надо совершить, чтобы заставить движущееся тело массой $m = 2$кг: а) увеличить скорость с $v = 2$м/с до $v = 5$м/с; б)остановиться при начальной скорости $v_0 = 8$м/с.
Ответ: а) $A = 21$Дж; б) $A = -64$Дж.

3.11. Для частицы массы m известна зависимость от времени ее скорости $\boldsymbol{v} = at\boldsymbol{e}_x + bt^2\boldsymbol{e}_y + ct^3\boldsymbol{e}_z$, где a, b, c - постоянные. Найти мощность $P(t)$, развиваемую силой, действующей на частицу.
Ответ: $P = a^2 t + 2b^2 t^3 + 3c^2 t^5$.

3.12. Камень, пущенный по поверхности льда со скоростью $v = 3$м/с, прошел до остановки расстояние $s = 20,4$м. Найти коэффициент трения k камня о лед.
Ответ: $k = \dfrac{v^2}{2gs} = 0,02$.

3.13. Вагон массой $m = 20$т, двигаясь равнозамедленно с начальной скоростью $v_0 = 54$км/ч, под действием силы трения $F_{\text{тр}} = 6$кН через некоторое время останавливается. Найти работу A сил трения и расстояние s, которое вагон пройдет до остановки.

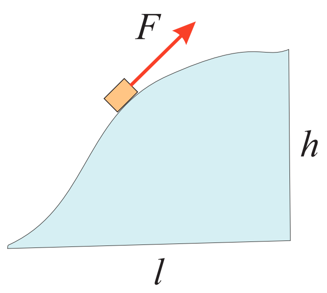

Рис. 13.

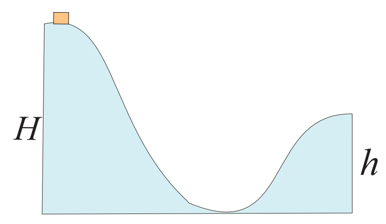

Рис. 14.

Ответ: $A = -2,25$МДж; $s = \dfrac{mv_0^2}{2F_{\text{тр}}} = 375$м.

3.14. Камень падает с некоторой высоты в течение времени $t = 1,43$с. Найти кинетическую T и потенциальную U энергии камня в средней точке пути. Масса камня $m = 2$кг.
Ответ: $T = U = 98$Дж.

3.15. Камень брошен со скоростью $v = 15$м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Найти кинетическую T и потенциальную U энергии камня: а) через время $t = 1$с после начала движения; б) в высшей точке траектории. Масса камня $m = 0,2$кг.
Ответ: а) $T = 6,6$Дж, $U = 15,9$Дж; б) $T = 5,6$Дж, $U = 16,9$Дж

3.16. Потенциальная энергия частицы имеет вид:а) $U = ax^3 + bx^2 + cz$; б) $U = axyz$, где a, b, c постоянные. Определить силу $\mathbf{F}$, действующую на частицу.
Ответ: а)$(3ax^2 + 2bx, 0, c)$; б)(ayz, axz, axy).

3.17. Шайба массы m соскальзывает с начальной скоростью v_1 с вершины горки высоты H и затем поднимается на горку высоты $h < H$ (рис. 14). При этом сила трения совершает над шайбой работу $A_{\text{тр}}$. Считая, что горки переходят друг в друга плавно, определить конечную скорость шайбы.
Ответ: $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2A_{\text{тр}}/m + 2g(H-h)}$.

3.18. Небольшая муфточка массы $m = 0,15$кг движется по гладкому проводу , изогнутому в горизонтальной плоскости в виде дуги окружности радиуса $R = 50$см (рис. 15, вид сверху). В точке 1, где скорость муфточки $v_0 = 7,5$м/с, на нее начала действовать постоянная горизонтальная сила $F = 30$Н. Найти скорость муфточки в точке 2.
Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 + 2FR/m} = 16$м/с.

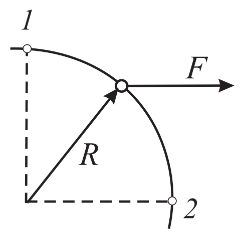

Рис. 15.

3.19. Мяч, летящий со скоростью $v_1 = 15$м/с, отбрасывается ударом ракетки в противоположном направлении со скоростью $v_2 = 20$м/с. Найти изменение импульса $m\Delta v$ мяча, если известно, что изменение его кинетической энергии $\Delta T = 8,75$Дж.

Ответ: $m\Delta v = \dfrac{2\Delta T}{v_2 - v_1} = 3,5$ кг · м/с.

3.20. Из ружья массой $m_1 = 5$кг вылетает пуля массой $m_2 = 5$г со скоростью $v_2 = 600$м/с. Найти скорость v_1 отдачи ружья.
Ответ: $v_1 = \dfrac{m_1}{m_2} v_2 = 0,6$м/с.

3.21. Человек с массой $m_1 = 60$кг, бегущий со скоростью $v_1 = 8$км/ч, догоняет тележку массой $m_2 = 80$кг, движущуюся со скоростью $v_2 = 2,9$км/ч, и вскакивает на нее. а) С какой скоростью u будет двигаться тележка? б) С какой скоростью u' будет двигаться тележка, если человек бежал ей навстречу?
Ответ: а) $u = 5,14$ км/ч; б) $u' = 1,71$км/ч.

3.22. Конькобежец массой $M = 70$кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень с массой $m = 3$кг со скоростью $v = 8$м/с. На какое расстояние s откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $k = 0,02$?
Ответ: $s = \dfrac{m^2v^2}{2M^2kg} = 0,3$м.

3.23. Тело массой $m_1 = 1$кг, движущееся горизонтально со скоростью $v_1 = 1$м/с, догоняет второе второе тело массой $m = 0,5$кг и неупруго соударяется с ним. Какую скорость u получат тела, если: а) второе тело стояло неподвижно; б) второе тело двигалось со скоростью $v_2 = 0,5$м/с в направлении, что и первое тело; в) второе тело двигалось со скоростью $v_2 = 0,5$м/с в направлении, противоположном направлению движения первого тела.
Ответ: а)$u = 0,67$ м/с; б)$u = 0,3$ м/с; в)$u = 0,5$ м/с

3.24. Тело массы $m_1 = 2$кг движется навстречу второму телу массой $m_2 = 1,5$кг и абсолютно неупруго соударяется с ним. Скорости тел непосредственно перед ударом были $v_1 = 1$м/с и $v_2 = 2$м/с. Какое время t будут двигаться эти тела после удара, если коэффициент коэффициент трения $k = 0,05/$
Ответ: $t = \dfrac{m_2v_2 - m_1v_1}{kg(m_1 + m_2)} = 0,58c$.

3.25. Тело с массой $m = 2$кг движется со скоростью $v_1 = 3$м/с и нагоняет тело массой $m_2 = 8$кг, движущееся со скоростью $v_2 = 1$м/с. Считая удар центральным, найти скорости u_1 и u_2 тел после

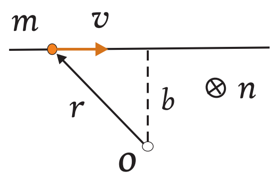

Рис. 16.

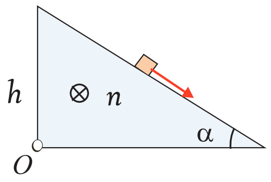

Рис. 17.

удара, если удар а)неупругий; б) упругий.
Ответ: а)$u_1 = u_2 = 1,4$ м/с; б) $u_1 = -0,2$м/с, $u_2 = 1,8$м/с.

3.26. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от центра шара до точки подвеса стержня $l = 1$м. Найти скорость v, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол $\alpha = 10°$.
Ответ: $v = 550$м/с.

3.27. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули $m_1 = 5$г, масса шара $m_2 = 0,5$кг. Скорость пули $v = 550$м/с. При каком предельном расстоянии l от центра шара до точки подвеса стержня шар от удара пули поднимется до верхней точки окружности?
Ответ: $l = \dfrac{m_1^2 v^2}{4g(m_1+m_2)} = 0,64$м.

3.28. Частица массы m движется по прямой со скоростью v (рис. 16). Найти момент импульса частицы относительно точки O, отстоящей от прямой на расстоянии b ($\mathbf{n}$ - единичный вектор нормальный за плоскость рисунка).
Ответ: $\mathbf{M} = mvb\,\mathbf{n}$.

3.29.Небольшое тело массы m начинает скользить с вершины наклонной плоскости (рис. 17). Через $\mathbf{n}$ обозначена нормаль к плоскости чертежа. Найти выражение для:
а) момента $\mathbf{N}$ результирующей силы, действующей на тело, относительно точки O;
б) момента импульса $\mathbf{M}$ тела относительно точки O.
Ответ: а) $\mathbf{N} = \frac{1}{2}mgh\sin 2\alpha\cdot\mathbf{n}$; б) $\mathbf{M} = \frac{1}{2}mght\sin 2\alpha\cdot\mathbf{n}$.

4. Движение твердого тела

Угловая скорость. Пусть твердое вращается в данный момент времени t вокруг некоторой оси l (ось вращения) и угол φ, отсчитываемый от некоторого фиксированного направления, определяет поворот тела в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Угловой скоростью тела называется вектор $\boldsymbol{\omega}$, величина которого равна

$$\omega = |\boldsymbol{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

и направленный вдоль оси вращения таким образом, чтобы из его конца вращение тела было видно происходящим против часовой стрелки. Если ось вращения в данный момент времени проходит через неподвижную точку тела, то она называется мгновенной осью вращения.

Момент импульса твердого тела. Момент импульса (угловой момент) твердого тела вращающегося вокруг неподвижной оси z:

$$M_z = I\omega\,.$$

Момент инерции. Моментом инерции тела, состоящего из дискретных материальных точек, относительно оси l называется величина

$$J_l = \sum m_i r_i^2\,,$$

где m_i - масса i-й точки, а r_i ее расстояние до оси l.
При непрерывном распределении массы внутри объема тела момент инерции относительно оси l определяется как

$$J_l = \int r^2\,dm\,,$$

где r расстояние элемента массы dm до оси l и интеграл означает суммирование по элементам массы dm.

Уравнение движения твердого тела. Уравнение движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z имеет вид

$$J_z \varepsilon = N_z \,,$$

где $\varepsilon = \dot{\omega}$ - угловое ускорение и N_z проекция на ось z суммарного момента внешних сил.

Кинетическая энергия твердого тела. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$T = J\omega^2/2 \,.$$

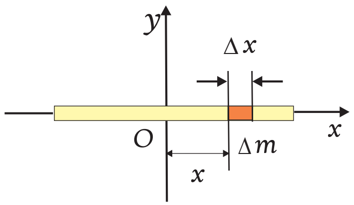

Рис. 18.

Решение задач

4.1. Найти момент инерции тонкого однородного стержня длины l и массы m относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно стержню.

Решение **:** Выберем систему координат как показано на рис. 18. Разобъем стержень на малые элементы длины Δx. Если Δm масса элемента, отстоящего от оси y на расстоянии x, то момент инерции стержня относительно оси y равен

$$J_y = \sum x^2 \Delta m \,,$$

где суммирование проводится по всем отрезкам Δx. Так как стержень однородный и его плотность постоянна, то

$$\frac{m}{l} = \frac{\Delta m}{\Delta x} \,,$$

откуда $\Delta m = \dfrac{m}{l}\Delta x$. Подставляя это значение в сумму и переходя к пределу $\Delta x \to 0$, получим

$$J_y = \frac{m}{l}\sum x^2 \Delta x \to \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2\, dx = \frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{ml^2}{12} \,.$$

4.2. К ободу однородного тонкого диска радиусом $R = 0,2$м и массы $m = 7,36$кг приложена касательная сила $F = 98,1$Н (рис. 19). Диск вращается вокруг неподвижной оси, соприкасаясь в нижней точке с неподвижной плоскостью, и испытывает силу трения $F_{\text{тр}} = 49,05$Н. Значком $\odot$ обозначен единичный вектор нормали $\mathbf{n}$. Найти угловую скорость ω вращения диска через $t = 1$с после начала движения.

Решение **:** Для решения используем уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$J\varepsilon = N + N_{\text{тр}} \,,$$

где $\varepsilon = \dot{\omega}$ - угловое ускорение, $J = mR^2/2$ - момент инерции диска, а N и $N_{\text{тр}}$ - моменты сил относительно оси вращения. Направление моментов сил относительно центра инерции инерции показаны на рисунке. Так как $\mathbf{N} = FR\mathbf{n}$ и $\mathbf{N}_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}R\mathbf{n}$, то проекции моментов на ось вращения (направленную вдоль $\mathbf{n}$) равны $N = FR$, $N_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}R$. Откуда

$$J\dot{\omega} = R(F - F_{\text{тр}}) \,.$$

Так как правая часть уравнения постоянна, то

$$\omega = \frac{2tR(F - F_{\text{тр}})}{mR^2} = 66,6\text{рад}/c^2 \,.$$

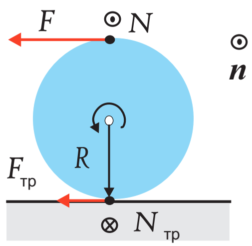

Рис. 19.

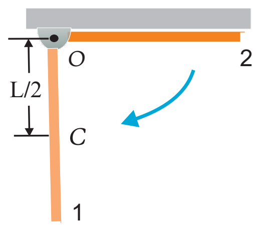

Рис. 20.

4.3. Однородный стержень, один конец которого закреплен, свободно вращается в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через точку O (рис. 20). Стержень начинает движение из горизонтального положения. Найти угловую скорость, когда стержень займет вертикальное положение.

Решение **:** Будем отсчитывать потенциальную энергию стержня от ее значения когда стержень находится в вертикальном положении, т.е. в этом положении стержень имеет нулевую потенциальную энергию. Когда стержень находится в горизонтальном положении угловая скорость вращения стержня равна нулю. Это следует из равенства $\omega = v/L = 0$, где v - скорость правого конца стержня, находящегося в горизонтальном положении. Поэтому кинетическая энергия стержня в этом положении (положение 2) равна нулю

$$T = \frac{J\omega_2^2}{2} = 0\,,$$

где $J = ML^2/3$ - момент инерции стержня относительно вертикальной оси, проходящей через точку O. Потенциальная энергия стержня в горизонтальном положении равна

$$U = Mg\frac{L}{2}\,,$$

т.к. высота центра инерции равна $L/2$. Когда стержень достигает нижнего положения, энергия стержня равна его кинетической энергии $J\omega_1^2/2$. Тогда, используя закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2}J\omega_1^2 + 0 = 0 + Mg\frac{L}{2}\,,$$

получаем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{MgL}{J}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}\,.$$

4.4. Маятник Максвелла. Небольшой диск массы m и радиуса R, насаженный на ось, опускается под действием силы тяжести на

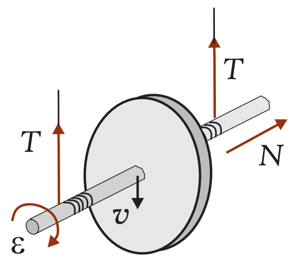

Рис. 21.

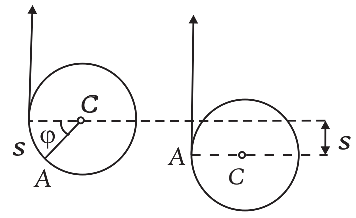

Рис. 22.

двух нитях, предварительно намотанных на ось диска (рис. 21). Найти ускорение a центра масс диска и натяжение нитей T.

*Решение***:** При движении диска вниз нити разматываются до полной длины. Достигнув максимальной длины нити, диск продолжает вращательное движение в том же направлении и начинает наматывать нити на ось, вследствие чего он поднимается вверх, замедляя при этом свое вращение. Дойдя до верхней точки, диск опять будет опускаться вниз и.т.д. Таким образом, диск будет совершать колебания вверх и вниз, поэтому такое устройство и называют маятником.

Запишем уравнения движения для центра инерции C и уравнение для момента импульса относительно оси диска.

$$\begin{aligned} ma &= mg - 2T \qquad (1)\\ J\varepsilon &= N\,, \qquad (2)\end{aligned}$$

где ε - угловое ускорение вокруг оси диска, а $N = 2TR$ - момент внешних сил относительно той же оси. (см. задачу 3.6). Найдем связь между ускорением a и угловым ускорением ε. Для этого заметим, что центр масс C опускается на такое расстояние, на какую длину разматывается нить (см. рис. 22). Если за время t ц.м. сместился на расстояние s, а диск повернулся на угол φ, то $s = R\varphi$. Поэтому дифференцируя это равенство два раза по t, получим

$$a = R\varepsilon. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1), (2) и (3) относительно трех переменных T, a и ε, находим ускорение центра масс

$$a = \frac{mg}{m + J/R^2}$$

и силу натяжения нити

$$T = \frac{mg}{2}\frac{J}{J + mR^2}.$$

Последние две формулы определяют ускорение и силы натяжения вне зависимости от того вверх или вниз движется диск. При колебаниях только скорость меняет знак, а ускорение и силы натяжения остаются постоянными.

Задачи

4.5. Вычислить момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов двумя способами: а) используя определение, как в задаче 4.1; б) применяя теорему Штейнера. Масса стержня - m, длина - L.
Ответ: $J = mL^2/3$

4.6. Однородный стержень длины $l = 1$м и массой $m = 0,5$кг вращается в вертикальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня (рис. 23). С каким угловым ускорением ε вращается стержень, если на него действует момент сил $N = 98,1$мН·м.
Ответ: $\varepsilon = \dfrac{12}{ml^2} = 2,35$рад$/c^2$.

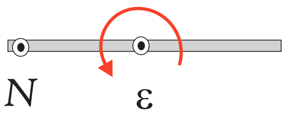

Рис. 23.

4.7. Однородный диск радиусом $R = 0,2$м и массой $m = 0,5$кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр, перпендикулярно его плоскости под действием касательной силы F. Зависимость угловой скорости вращения ω от времени дается формулой $\omega = A + Bt$, где $B = 8$рад$/c^2$. Найти касательную силу F.
Ответ: $F = mBR/2 = 0,4$Н.

4.8. Однородный диск, момент инерции которого относительно его оси $J = 63,6$кгм^2 вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 31,4$ рад/с. Найти момент N постоянной силы торможения, которую надо приложить к диску, чтобы он остановился через время $t = 20c$.
Ответ: $N \approx 100$Нм.

4.9. К ободу колеса радиусом $R = 0,5$м и массой $m = 50$кг приложена касательная сила $F = 98,1$Н. Найти угловое ускорение ε колеса. Через какое время t после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения $\nu = 100$об/с? Колесо считать однородным диском. Трением пренебречь.
Ответ: $t = 2\pi\nu/\varepsilon = 80$с.

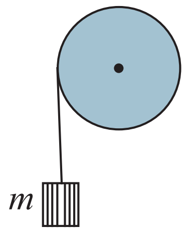

Рис. 24.

4.10. К ободу однородного диска радиуса $R = 0,2$м приложена касательная сила $F = 98,1$Н. При вращении на диск действует момент сил трения $N_{\text{тр}} = 98,1$Нм. Найти массу диска m, если известно, что диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 100$рад/с^2.
Ответ: $m = \dfrac{2(RF - N_{\text{тр}})}{\varepsilon R^2} = 7,36$кг.

4.11. На однородный цилиндр массы m_0 намотана нить, к концу которой привязан груз массы $m = 2$кг (рис. 24). Найти ускорение a груза.

4.12. На диск радиусом $R = 0,5$м намотана нить, к концу которой привязан груз массой $m = 10$кг. Найти момент инерции диска J, если известно, что груз опускается с ускорением $a = 2,04$м/с^2.
Ответ: $J = \dfrac{mR^2(g - a)}{a} = 9,5$кгм^2.

5. Колебания

Положение равновесия. Положением равновесия тела называется такое его положение, в котором результирующая сила, действующая на тело, равна нулю. Пусть движение тела описывается одной координатой X и положение равновесия есть X_0. Смещением из равновесного положения называется разность

$$x = X - X_0\,.$$

Гармоническое колебательное движение. Гармоническим колебательным движением (простым гармоническим колебанием) называется такое движение, при котором смещение из положения равновесия меняется со временем по закону

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)\,.$$

Здесь A - амплитуда колебаний, ω - угловой частота колебаний, $\omega t + \alpha$ - фаза колебания и α - начальная фаза. Частота колебания связана с периодом колебаний равенством

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,.$$

Число колебаний в единицу времени (частота колебаний) равно

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}\,.$$

При гармоническом колебании смещение удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,.$$

Тело, совершающее постое гармоническое колебание, называется гармоническим осциллятором.

Затухающие колебания. Если смещение $x(t)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,,$$

то колебание называется затухающим. Коэффициент β называется коэффициентом затухания, ω_0 - собственной частотой осциллятора. Частотой затухающих колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,.$$

Смещение при затухающих колебаниях меняется по закону

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)\,.$$

Логарифмический декремент затухания.

$$\lambda = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\omega}\,,$$

где $T = 2\pi/\omega$ - период затухающих колебаний.

Решение задач

5.1. Амплитуда гармонического колебания $A = 5$см, период $T = 4$с. Найти максимальную скорость $v_{\max}$ колеблющейся точки и ее максимальное ускорение $a_{\max}$.

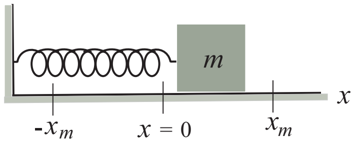

Рис. 25.

Решение: Скорость и ускорение точки, совершающей колебательное движение определяются соотношениями

$$v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha)$$
$$a = \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha)\,.$$

Эти величины имеют максимальное значение когда синус и косинус равны ± 1. Откуда $v_{\max} = A\omega = 2\pi A/T = 7,85\cdot 10^{-2}$м/с и $a_{\max} = 0,12$м/с^2.

5.2. Простой гармонический осциллятор состоит из блока массы $m = 2,00$кг, прикрепленного к пружине жесткости $k = 100$Н/м (рис. 25). В момент $t = 1,00$с положение блока равно $x = 0,129$м, а его скорость $v = 3,415$м/с. Найти: а)амплитуду колебаний ; б)положение и скорость блока при $t = 0$с.

Решение: а) Так как в любой момент времени t

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)\,, \qquad v = -\omega A \sin(\omega t + \alpha)\,,$$

то

$$\mathrm{tg}(\omega t + \alpha) = -\frac{v}{\omega x}\,.$$

Откуда

$$\omega t + \alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{-v}{\omega x}\right)\,.$$

Подставляя в это равенство $\omega = \sqrt{k/m} = 7,07$рад/с и $t = 1$с, найдем фазу колебаний в этот момент, $\omega t + \alpha = -1,31$рад. Амплитуду находим из равенства

$$A = \frac{x}{\cos(\omega t + \alpha)} = 0,5\text{м}$$

при $t = 1$с и $x = 0,129$м;

б)Из равенства $\omega t + \alpha = -1,31$рад при $t = 1$с найдем начальную фазу $\alpha = -8,38$рад. Откуда $x_0 = A\cos\alpha = -0,251$м и $v_0 = -\omega A \sin\alpha = 3,06$м/с.

5.3. На рис. 26 две одинаковые пружины жесткости $k = 7580$Н/м прикреплены к блоку массы $m = 0,245$кг. Найти частоту колебаний блока, скользящего по поверхности пола.

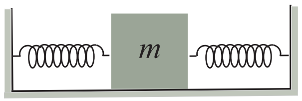

Рис. 26.

Решение: Пусть x_1 - удлинение левой пружины, а x_2 - правой. Так как суммарная длина пружин постоянна, то $x_1 = -x_2$. По закону Гука со стороны левой пружины на блок действует сила $F_1 = -kx_1$, со стороны правой - сила $F_2 = kx_2 = -kx_1$ (если правая пружина сжата, то $x_2 < 0$ и сила направлена налево, если растянута, то $x_2 > 0$ и сила направлена вправо). Результирующая сила равна $F = F_1 + F_2$. Если x_0 - положение равновесия блока, то

его текущая координата x равна $x = x_0 + x_1 = x_0 - x_2$ и ускорение есть $a = \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$. Второй закон Ньютона тогда дает

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1\,.$$

Подставляя в это уравнение $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, получим для круговой частоты $\omega^2 = 2k/m$. Откуда частота $f = \omega/2\pi$ равна $f = 39,6$Гц.

5.4. Уравнение движения точки дано в виде $x = 2\cos(\pi t/2 + \pi/4)$. Найти период колебаний T, максимальную скорость $v_{\max}$ и максимальное ускорение $a_{\max}$ точки.
Ответ: $T = 4$с , $v_{\max} = 3,14 \cdot 10^{-2}$м/с, $a_{\max} = 4,93 \cdot 10^{-2}$м/с^2.

5.5. Телу, совершающему простое гармоническое движение, требуется 0,25с чтобы переместиться из одной точки в другую, в которых оно имеет нулевую скорость. Расстояние между точками равно 36см. Вычислить: а) период; б) частоту; в) амплитуду движения.
Ответ: а) $T = 0,5$с; б) а $f = 2,0$Гц; в)$A = 18$см.

5.6. Тело массы $m = 0,12$кг совершает простое гармоническое движение с амплитудой $A = 8,5$см и периодом $T = 0,2$с. а)Найти величину максимальной силы действующей на тело; б)если колебания осуществляются вследствие деформации пружины, найти жесткость пружины.
Ответ: а)10Н; б) 120Н/м.

5.7. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 5$см, если за время $t = 1$мин совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний $\alpha = \pi/4$. Начертить график этого движения.
Ответ: $x = 0,05\sin(5\pi t + \pi/4)$.

5.8. Через какое время от начала движения, точка совершающая гармоническое колебание, сместиться от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний $T = 24$с, начальная фаза $\alpha = 0$.
Ответ: $t = 2$с.

5.9. Осциллятор состоит из блока массы 0,5 кг, соединенного с пружиной (рис. 25). Когда система совершает колебания с амплитудой 0,35 см, осциллятор повторяет каждое свое движение через каждые 0,5 с. Найти: а)период; б) частоту; в) угловую частоту; г)жесткость пружины; д) максимальную скорость; е) величину максимальной силы, действующей на блок со стороны пружины.
Ответ: а) 0,5с; б) 2с$^{-1}$; в)12,6 рад/с; г) 79,0 Н/м; д) 4,40 м/с; е)77,6 Н.

5.10. К пружине подвешен груз массой $m = 10$кг. Известно, что пружина под действием силы $F = 9,8$Н растягивается на $l = 1,5$см. Найти период вертикальных колебаний груза.
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{ml/F} = 0,78$с.

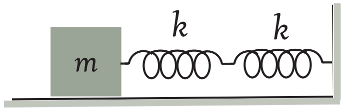

Рис. 27.

5.11. На рис. 27 две пружины соединены вместе и прикреплены к блоку массы $m = 0,245$кг, который совершает колебания на гладкой поверхности Жесекость каждой пружины $k = 6430$Н/м. Найти частоту колебаний f.
Ответ: $f = (2\pi)^{-1}\sqrt{k/2m} = 18,2$Гц.

5.12. Найти коэффициент затухания β математического маятника длины l, если за период амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза.
Ответ: $\beta = (1/2\pi)\sqrt{g/l}\left(\ln 2/\sqrt{4\pi^2 + \ln^2 2}\right)$.

6. Уравнение состояния идеального газа

Идеальный газ. Идеальным газом называется газ, для которого уравнение состояния имеет вид

$$pV = \nu RT$$

где p - давление, V - объем, занимаемый газом, T - температура, измеряемая в кельвинах, $\nu = m/M$ - число молей, m - масса газа,

M - молярная масса, $R = 8,31$Дж/(моль$\cdot$К) - газовая постоянная. Уравнение состояния может быть переписано также в виде

$$pV = kNT\,,$$

где N - число частиц в объеме V, $k = R/N_A = 1,38\cdot 10^{-23}$Дж/К - постоянная Больцмана, $N_A = 6,022\cdot 10^{23}$моль$^{-1}$ - число Авогадро.
Закон Дальтона. Пусть смесь идеальных газов находится в объеме V при температуре T. Согласно закона Дальтона давление p смеси идеальных газов равно сумме их парциальных давлений:

$$p = \sum_i p_i = \frac{RT}{V}\sum_i \frac{m_i}{M_i}\,,$$

где $p_i = (m_i/M_i)RT/V$ - парциальное давление i-го газа, m_i - его масса, а M_i - молярная масса.

Решение задач

6.1. Какую температуру T имеет масса $m = 2$г азота, занимающего объем $V = 820$см^3 при давлении $p = 0,2$ МПа?

Решение: Из уравнения состояния

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

получаем

$$T = \frac{M}{m}\frac{PV}{R}\,.$$

Молярная масса азота (N_2) $M = 0028$кг/моль. Откуда, подставляя численные данные, находим

$$T = \frac{0,2\cdot 10^6\cdot 820\cdot 10^{-6}\cdot 0,028}{2\cdot 10^{-3}8,34} = 275K\,.$$

6.2.В сосуде объемом $V = 30$л содержится идеальный газ при температуре 0°C. После того как часть была выпущена наружу, давление в сосуде понизилось на $\Delta p = 0,78$атм (без изменения температуры). Найти массу m выпущенного газа. Плотность данного газа при нормальных условиях[1] $\rho = 1,3$г/л .

Решение: Пусть первоначально масса газа была m_1, давление p_1 при температуре $t_0 = 0°$C. Эти величины связаны уравнением состояния

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_0\,,$$

где M - молярная масса и T_0 - температура по шкале Кельвина.

После того как часть газа массы m_1 была выпущена, имеем

$$(p_1 - \Delta p) V = \frac{m_2}{M} R T_0\,.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\Delta p\, V = \frac{m_1 - m_2}{M} R T_0\,,$$

откуда

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{MV}{RT_0} \Delta p\,.$$

Найдем неизвестную молярную массу. Так как при нормальных условиях в объеме V содержится масса $m_0 = \rho V$ и

$$p_0 V = \frac{m_0}{M} R T_0 = \frac{\rho V}{M} R T_0\,,$$

то

$$\frac{M}{RT_0} = \frac{\rho}{p_0}\,.$$

В результате получим

$$\Delta m = \rho V \frac{\Delta p}{p_0} = 0,03\text{кг}$$

[1] При нормальных условиях состояние газа характеризуется температурой $t = 0°$C и давлением $p_0 = 1$атм $= 1,013 \cdot 10^5$Па

Задачи

6.3. Какой объем V занимает масса $m = 10$г кислорода при давлении $p = 100$кПа и температуре $t = 20°$C. ($M(O_2) = 0,032$кг/моль).
Ответ: $V = 7,6 \cdot 10^{-3}$м^3.

6.4. Баллон объемом $V = 12$л наполнен азотом при давлении $p = 8,1$МПа и температуре $t = 17°$C. Какая масса m азота находится в баллоне?
Ответ: $m = 1,13$кг.

6.5. Каким должен быть наименьший объем V баллона, вмещающего массу $m = 6,4$кг кислорода, если его стенки при температуре $t = 20°$C выдерживают давление $p = 15,7$МПа?
Ответ: $V = 31$л.

6.6. В баллоне находилась масса $m_1 = 10$кг идеального газа при давлении $p_1 = 10$МПа. Какую массу Δm газа взяли из баллона, если давление стало равным $p_2 = 2,5$МПа? Температуру газа считать постоянной.
Ответ: $\Delta m = 7,5$кг.

6.7. Найти массу m воздуха, заполняющего аудиторию высотой $h = 5$м и площадью пала $S = 200$м^2. Давление воздуха $p = 100$кПа, температура помещения $t = 17°$C. Молярная масса воздуха $M = 0,029$кг/моль.
Ответ: $m = 1,2 \cdot 10^3$кг.

6.8. Массу $m = 5$г азота, находящегося в закрытом сосуде объемом $V = 4$л при температуре $t = 20°$C нагревают до температуры $t = 40°$C. Найти давления p_1 и p_2 до и после нагревания.
Ответ: $p_1 = 109$кПа, $p_1 = 116$кПа.

6.9. Некоторый идеальный газ при температуре $t = 10°$C и давлении $p = 20$кПа имеет плотность $\rho = 0,34$кг/м^3. Найти молярную массу газа.
Ответ: $M = 0,04$кг/моль.

6.10. В закрытом сосуде объемом $V = 1$м^3 находится $m_1 = 1,6$кг кислорода и масса $m_2 = 0,9$кг воды. Найти давление p в сосуде при температуре $t = 500°$C, зная, что при этой температуре вся вода превращается в пар. Молярная масса водяного пара 0,018

кг/моль.
Ответ: $p = \dfrac{RT}{V}\left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}\right) = 642$кПа.
6.11. В сосуде 1 объема $V_1 = 3$л находится газ подавлением $p_1 = 0,2$МПа. В сосуде 2 объема $V_1 = 4$л находится тот же газ под давлением $p_2 = 0,1$МПа. Температуры газа в обоих сосудах одинаковы. Под каким давлением p буде находится газ, если соединить сосуды 1 и 2 трубкой.
Ответ: $p = \dfrac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 143$кПа.
6.12. Число Лошмидта. Найти число молекул в кубическом сантиметре любого идеального газа при нормальных условиях ($t = 0°C, p = 1$атм $= 1,013 \cdot 10^5$Па).
Ответ: $N = 2,68 \cdot 10^{19}$ молекул.
6.13. В баллоне объемом $V = 7,5$л при температуре $T = 300$К находится смесь идеальных газов: $\nu_1 = 0,10$ моль кислорода, $\nu_2 = 0,20$ моль азота, $\nu_3 = 0,30$ моль углекислого газа. Считая газы идеальными найти:
а) давление смеси;
б) среднюю малярную массу M данной смеси, которая входит в уравнение ее состояния $pV = (m/M)RT$, где m - масса смеси.
Ответ: а) $p = 1,968$атм; б) $M = \dfrac{M_1\nu_1 + M_2\nu_2 + M_3\nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = 36,7$г/моль;
$M_1 = M(O_2)$, $M_2 = M(N_2)$, $M_3 = M(CO_2) = M(C) + M(O_2)$.
6.14. В сосуде находится масса $m_1 = 10$г углекислого газа и масса $m_2 = 15$г азота. Найти плотность ρ смеси при температуре $t = 27°C$ и давлении $p = 150$кПа.
Ответ: $\rho = \dfrac{p}{RT}\dfrac{m_1 + m_2}{m_1/M_1 + m_2/M_2} = 1,98$кг/м^3.
6.15. Масса $m = 12$г газа занимает объем $V = 4$л при температуре $t_1 = 7°C$. После нагрева газа при постоянном давлении его плотность стала равной $\rho = 0,6$кг/м^3. До какой температуры t_2 нагрели газ.
Ответ: $T_2 = mT_1/V_1\rho = 1400$К.
6.16. Масса $m = 10$г кислорода находится при давлении $p = 304$кПа и температуре $t_1 = 10°C$. После расширения вследствие

нагревания при постоянном давлении кислород занял объем $V_2 = 10$л. Найти объем V_1 газа до расширения, температуру t_2 газа после расширения, плотности ρ_1 и ρ_2 газа до и после расширения.
Ответ: $V_1 = 24 \cdot 10^{-3}$м^3, $\rho_1 = 4,14$кг/м^3, $T_2 = 1170$К, $\rho_2 = 1$кг/м^3.
6.17. Сосуд объемом $V = 20$л содержит смесь водорода и гелия при температуре $t = 20°C$ и давлении $p = 2,0$атм. Масса смеси $m = 5,0$г. Найти отношение массы водорода m_1 к массе гелия m_2 в данной смеси ($M(H_2) = M_1 = 2$г/моль, $M(He) = M_2 = 4$г/моль).
Ответ: $m_1/m_2 = \dfrac{1 - a/M_2}{a/M_2 - 1} = 0,5$, $a = RT/pV$
6.18. В сосуде находится смесь $m_1 = 7,0$г азота и $m_2 = 11$г углекислого газа при температуре $T = 290$К и давлении $p_0 = 1$атм. Найти плотность этой смеси, считая газы идеальными ($M(N_2) = M_1 = 28$г/моль, $M(CO_2) = M_2 = 44$г/моль).
Ответ: $\rho = (m_1 + m_2)/V = \dfrac{m_1 + m_2}{(m_1/M_1 + m_2/M_2)RT} = 1,5$кг/м^3.
6.19. Найти максимально возможную температуру идеального газа в каждом из нижеследующих процессов:
а) $p = p_0 - \alpha V^2$; б) $p = p_0 e^{\beta V}$,
где p_0, α и β - положительные постоянные, V - объем моля газа.
Ответ: а)$T_{\max} = \dfrac{2\sqrt{p_0^3}}{3R\sqrt{3\alpha}}$; б)$T_{\max} = \dfrac{p_0}{e\beta R}$.

7. Первый закон термодинамики. Теплоемкость

Первый закон термодинамики. Закон сохранения энергии в термодинамическом процессе формулируется в виде первого закона термодинамики и записывается в виде

$$Q = \Delta U + A\,,$$

где Q количество тепла, полученного телом, при переходе из начального в некоторое конечное состояния, которое расходуется на изменение внутренней энергии ΔU и совершении телом работы

A; Q - положительно, если тело поглощает тепло и отрицательно, если отдает; A - положительна, если тело совершает работу над внешним окружением и отрицательна, если внешние силы совершают работу над телом. Работа A и теплота Q зависят от процесса изменения состояния, изменение внутренней энергии от процесса не зависит.

Работа, совершаемая газом. При обратимом процессе, работа совершаемая газом при расширении (сжатии) равна

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p dV\,,$$

где p - давление газа, V - его объем.

Теплоемкость. Теплоемкостью C тела называется отношение элементарного количества теплоты $d'Q$, сообщенного телу в каком-либо процессе, к соответствующему измeбнению температуры тела:

$$C = \frac{d'Q}{dT}\,.$$

Теплоемкость зависит от массы тела, его химического состава, термодинамического состояния и вида процесса сообщения теплоты.

Внутренняя энергия идеального газа.

$$U = \frac{m}{M} C_V T = \frac{m}{M}\frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{PV}{\gamma - 1}\,,$$

где $\gamma = C_p/C_V$ - показатель адиабаты, C_p и C_V - молярные теплоемкости, соответственно, при постоянном давлении и объеме.

Для идеального газа

$$C_p = C_V + R\,.$$

Гипотеза о равнораспределении энергии по степеням свободы. Согласно гипотезе о равнораспределении средняя энергия молекулы равна

$$< \varepsilon >= \frac{i}{2} kT\,,$$

здесь $i = z_{\text{пост}} + z_{\text{вр}} + 2z_{\text{кол}}$, где $z_{\text{пост}}$ - число поступательных, $z_{\text{вр}}$ - вращательных и $z_{\text{кол}}$ - колебательных степеней свободы молекулы.

Внутренняя энергия одного моля идеального газа может быть записана в виде

$$U = \frac{i}{2} RT\,,$$

а молярные теплоемкости как

$$C_V = \frac{i}{2} R \qquad C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2} R\,.$$

Решение задач

7.1. Масса $m = 10$г кислорода находится при давлении $p = 0,3$МПа и температуре $t = 10°$C. После нагревания при $p = \text{const}$ газ занял объем $V_2 = 10$л. Найти количество теплоты Q, полученное газом, если теплоемкость газа $C_p = 29,1$Дж/(моль $\cdot$ К).

Решение **:** Из первого закона термодинамика количество теплоты, полученное газом равно

$$Q = \Delta U + A\,,$$

где ΔU - изменение внутренней энергии $U = \nu C_V T$, ν - число молей и A - работа совершенная газом при расширении

$$A = p\Delta V = p(V_2 - V_1)\,.$$

Так как

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T = \nu (C_p - R)(T_2 - T_1)\,,$$

то

$$Q = \nu (C_p - R)(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1)\,.$$

Неизвестные T_2 и V_1 найдем из уравнения Клапейрона в начальном и конечном состояниях: $pV_1 = (m/M)RT_1$, $pV_2 = (m/M)RT_2$.

Откуда $V_1 = mRT_1/(Mp)$ и $T_2 = MpV_2/(mR)$. В результате получаем

$$Q = (C_p - R)\Big(\frac{pV_2}{R} - \frac{m}{M}T_1\Big) + p\Big(V_2 - \frac{m}{M}\frac{RT_1}{p}\Big) = 7,9\text{кДж}\,.$$

7.2. Два тела с температурами $T_1 > T_2 > 0$ и теплоемкостями C_1, C_2 помещены в теплоизолирующий контейнер и разделены теплоизолирующей перегородкой. Какая температура T_0 в результате установится в составном теле после снятия перегородки и приведения тел в тепловой контакт?

Решение **:** Поскольку внутренняя энергия системы не изменится после приведения тел в тепловой контакт, то изменение внутренней энергии должно быть равно нулю

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0\,,$$

где U_1, U_2 - внутренние энергии тел. Так как каждое из тел не совершает работы, то $\Delta U_i = Q_i = C_i(T_0 - T_i)$, где Q_i - тепло, полученное i-м телом. Тогда

$$Q_1 + Q_2 = C_1(T_0 - T_1) + C_2(T_0 - T_2)\,.$$

Откуда получаем

$$T_0 = \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2}\,.$$

Задачи

7.3. Масса $m = 12$г азота находится в закрытом сосуде объемом $V = 2$л при температуре $t = 10°$С. После нагревания давление в сосуде стало стало равным $p = 1,33$МПа. Какое количество теплоты Q сообщено газу ? ($C_V = 20,8$Дж/(моль $\cdot$ К)).
Ответ: $Q = 4,15$кДж.
7.4. В сосуде объемом $V = 2$л находится азот при давлении $p = 0,1$МПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы: а) при $p = \text{const}$ объем увеличился вдвое; б) при $V = \text{const}$

давление увеличилось вдвое?
Ответ: а) $Q = C_p pV/R = 0,7$кДж; б) $Q = C_V pV/R = 0,5$кДж.
7.5. В закрытом сосуде находится масса $m = 14$г азота при давлении $p_1 = 0,1$МПа и температуре $t = 27°$С. После нагревания давление в сосуде повысилось в 5 раз. До какой температуры t_2 был нагрет газ? Найти объем V сосуда и количество теплоты Q сообщенное газу.
Ответ: $T_2 = 1500$К, $V = 12,4$л, $Q = 12,4$кДж.
7.6. Какое количество теплоты Q надо сообщить массе $m = 12$г кислорода, чтобы нагреть его на $\Delta t = 50°$С. при $p = \text{const}$ ($C_V = 20,8$Дж/(моль $\cdot$ К)).
Ответ: $Q = (mC_p/M)\Delta T = 545$Дж.
7.7. Азот находится в закрытом сосуде объемом $V = 3$л при температуре $t_1 = 27°$С и давлении $p_1 = 0,3$Мпа. После нагревания давление в сосуде повысилось до $p_2 = 2,5$МПа. Найти температуру t_2 азота после нагревания и количество Q теплоты, сообщенное азоту.
Ответ: $T_2 = (p_2/p_1)T_1 = 2500$К, $Q = \dfrac{C_V V(p_2 - p_1)}{R} = 16,5$кДж.
7.8. Масса $m = 10$г кислорода находится при давлении $p = 300$кПа и температуре $t = 10°$С. После нагревания при $p = const$ газ занял объем $V = 10$л. Найти количество теплоты Q, полученное газом , изменение внутренней энергии ΔU газа и работу A, совершенную газом при расширении.
Ответ: $Q = \dfrac{C_p}{MR}(MpV_2 - mRT_1) = 7,9$кДж, $\Delta U = 5,66$кДж, $A = 2,26$кДж.
7.9. Гелий, находящийся при нормальных условиях, изотермически расширяется от объема $V_1 = 1$л до $V_2 = 2$л. Найти работу A, совершенную газом при расширении, и количество теплоты Q, сообщенное газу.
Ответ: $A = p_1V_1 \ln\dfrac{V_2}{V_1} = 70$Дж: $Q = 70$Дж.
7.10. Два теплоизолированных баллона 1 и 2 наполнены воздухом и соединены короткой трубкой с вентилем. Известны объемы баллонов, а также давление и температура воздуха в них: (V_1, p_1, T_1),

(V_2, p_2, T_2). Найти температуру и давление воздуха, которые установятся после открытия вентиля.

Ответ: $p = \dfrac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}$, $T = T_1T_2\dfrac{p_1V_1 + p_2V_2}{p_1V_1T_2 + p_2V_2T_1}$.

7.11. Медный шарик массы m_1 с удельной теплоемкостью c_1 нагревают в лабораторной печи до температуры T_1. Затем он помещается в стеклянный сосуд, содержащий воду массой m_2, удельная теплоемкость которой c_2. Теплоемкость стакана $C_\text{с}$. Начальная температура воды и сосуда T_2. Принимая, что шарик, вода и сосуд вместе образуют теплоизолированную систему, и вода не испаряется, найти конечную температуру T системы после установления теплового равновесия.

Ответ: $T = \dfrac{c_1m_1T_1 + m_2c_2T_2 + C_\text{с}T_2}{c_1m_1 + c_2m_2 + C_\text{с}}$.

7.12. Газообразный водород ($\gamma = 1,41$), находившийся при нормальных условиях (температура T_0, давление p_0) в закрытом сосуде объемом $V = 5$л, охладили на $\Delta T = 55$К. Найти приращение внутренней энергии газа и количество отданного им тепла.

Ответ: $Q = \Delta U = -\dfrac{p_0V}{\gamma - 1}\dfrac{\Delta T}{T_0} = -0,25$кДж.

7.13. Какое количество тепла Q надо сообщить азоту при изобарическом нагревании, чтобы газ совершил работу $A = 2,0$Дж? Показатель адиабаты $\gamma = 1,4$.

Ответ: $Q = \dfrac{\gamma A}{\gamma - 1} = 7$Дж.

7.14. Найти молярную массу газа, если при нагревании $m = 0,50$кг этого газа на $\Delta T = 10$К изобарически требуется на $\Delta Q = 1,48$кДж тепла больше, чем при изохорическом нагревании.

Ответ: $M = mR\dfrac{\Delta T}{\Delta Q} = 28$г/моль.

7.15. Один моль идеального газа изобарически нагрели на $\Delta T = 72$К, сообщив ему количество тепла $Q = 1,60$кДж. Найти приращение его внутренней энергии и величину $\gamma = C_p/C_V$.

Ответ: $\Delta U = 1$кДж, $\gamma = \dfrac{Q}{Q - R\Delta T} = 1,6$.

7.16.Два моля идеального газа при температуре $T_0 = 300$К охладили изохорически, в следствие чего его давление уменьшилось в $n = 2,0$ раза. Затем его изобарически расширили так, чтобы в конечном состоянии его температура стала равной первоначальной. Найти количество тепла Q, поглощенного газом в данном процессе.

Ответ: $Q = \nu RT_0(1 - 1/n)$.

7.17. В вертикальном цилиндре под невесомым поршнем находится один моль некоторого идеального газа при температуре T. Какую работу необходимо совершить, чтобы медленно поднимая поршень, изотермически увеличить объем газа под ним в n раз. Трения нет.

Ответ: $A = RT(n - 1) - RT\ln n$.

7.18. Объем моля идеального газа с показателем адиабаты γ изменяется по закону $V = a/T$, $a = \text{const}$. Найти количество тепла, полученное газом в этом процессе, если его температура испытала приращение ΔT.

Ответ: $Q = \dfrac{R\Delta T(2 - \gamma)}{\gamma - 1}$.

7.19.Три моля идеального газа, находившегося при температуре $T = 273$К, изотермически расширили в $n = 5,0$ раз и затем изохорически нагрели так, что его давление стало равным первоначальному. За весь процесс газу сообщили количество тепла $Q = 80$кДж. Найти γ для этого процесса.

Ответ: $\gamma = 1 + \dfrac{n - 1}{Q/\nu RT_0 - \ln n} = 1,4$.

Степени свободы

7.20. Найти внутреннюю энергию U массы $m = 20$г кислорода при температуре $t = 10°$C. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул и какая на долю вращательного движения молекул. Молекулы рассматривать как жесткие.

Решение **:** Внутренняя энергия ν молей газа равна

$$U = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT$$

и $i = z_{\text{пост}} + z_{\text{вр}}$. Для двухатомных жестких молекул $i = 5$, так как $z_{\text{пост}} = 3$, $z_{\text{вр}} = 2$. Поэтому

$$U = \frac{5}{2}\frac{m}{M}RT = 3,7\text{кДж}, \qquad U_{\text{пост}} = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT = 2,2\text{кДж}$$

,

$$U_{\text{вр}} = \frac{m}{M}RT = 1,5\text{кДж}\,.$$

7.21. Найти удельную теплоемкость кислорода для: а)$V = \text{const}$; б) $p = \text{const}$. Упругостью молекул пренебречь.

Решение **:** Удельная теплоемкость связана с молярной соотношением $c = C/M$.
а) При $V = \text{const}$

$$c_V = \frac{C_V}{M} = \frac{i}{2M}R = \frac{5}{2M}R = 650\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})\,;$$

б) При $p = \text{const}$, $C_p = C_V + R$, откуда

$$c_p = \frac{C_p}{M} = \frac{C_V + R}{M} = \frac{i+2}{2M}R = \frac{7}{2M}R = 910\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})\,.$$

7.22. Найти внутреннюю энергию U массы $m = 1$г воздуха при температуре $t = 15°$C. Молярная масса воздуха $M = 0,029$кг/моль. Воздух считать двухатомным газом жестких молекул.
Ответ: $U = 206,4$Дж.

7.23. Найти среднюю энергию $U_{\text{вр}}$ вращательного движения молекул, содержащихся в массе $m = 1$кг азота при температуре $t = 7°$C.
Ответ: $U_{\text{вр}} = 83$кДж.

7.24. Найти внутреннюю энергию идеального газа двухатомных жестких молекул, находящегося в сосуде объемом $V = 2$л под давлением $p = 150$кПа.
Ответ: $U = 5pV/2 = 750$Дж.

7.25. Масса $m = 1$кг двухатомного газа жестких молекул находится под давлением $p = 80$кПа и имеет плотность $\rho = 4\text{кг}/\text{м}^3$. Найти энергию теплового движения U молекул газа при этих условиях.
Ответ: $U = 50$кДж.

7.26. Какое число N жестких молекул двухатомного газа содержит объем $V = 10\text{см}^3$при давлении $p = 5,3$кПа и температуре $t = 27°$C? Какой энергией теплового движения U обладают эти молекулы?
Ответ: $N = 1,3\cdot 10^{19}$; $U = 5NkT/2 = 0,133$Дж.

7.27. Удельная теплоемкость некоторого идеального газа двухатомных жестких молекул $c_p = 14,7$кДж/кгК. Найти молярную массу M газа.
Ответ: $M = 0,002$кг/моль.

7.28. Молярная масса некоторого газа $M = 0,03$кг/моль, отношение удельных теплоемкостей $\gamma' = c_p/c_V = 1,4$. Найти удельные теплоемкости c_p и c_V.
Ответ: $c_V = \dfrac{R}{M(\gamma' - 1)} = 693$Дж/(кг К); $c_p = c_V + R/M = 970$Дж/(кг К)

7.29. Какое количество теплоты надо сообщить массе $m = 12$г кислорода, чтобы нагреть его на $\Delta t = 50°$C при $p = \text{const}$.
Ответ: $Q = 7mR\Delta T/2M = 545$Дж.

7.30. Найти молярную массу и число степеней свободы молекул идеального газа, если известны его удельные теплоемкости: $c_V = 0,65$Дж/г·К и $c_p = 0,91$Дж/г·К.
Ответ: $M = R/(c_p - c_V)$; $i = 5$.

7.31. Найти приращение внутренней энергии 16г водорода при увеличении его температуры от 70 до 300K. Иметь ввиду, что при этом происходит "размораживание"вращательных степеней свободы.
Ответ: $\Delta U = (5T_2 - 3T_1)mR/2M = 43$кДж.

7.32. Молекулы идеального газа, у которого $\gamma = 1,40$ и давление $p = 100$кПа, имеют среднюю энергию $< \varepsilon >= 2,5 \cdot 10^{-20}$Дж. Найти число молекул в единице объема.
Ответ: $n == \dfrac{< \varepsilon >}{p(\gamma - 1)}$.
7.33. Найти число степеней свободы молекул идеального газа, молярная теплоемкость которого:
а) при постоянном давлении $C_p = 29$Дж/(моль К);
б) в процессе $pT = \mathrm{const}$ равна $C = 29$Дж/(моль К).
Ответ: а)$i = 5$; б) $i = 2(C/R - 2) = 3$.
7.34. Найти приращение внутренней энергии 16г водорода при увеличении его температуры от $T_1 = 70$К до $T_2 = 300$К. Иметь в виду, что при этом происходит "размораживание"вращательных степеней свободы.
Ответ: $\Delta U = (5T_2 - 3T_1)\dfrac{mR}{2M}$.

8. Газ Ван-дер-Ваальса

Газ Ван-дер-Ваальса. Газом Ван-дер-Ваальса называтся газ, уравнение состояния которого имеет вид

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V - \nu b\right) = \nu RT\,.$$

Константы a и b называются постоянными Ван-дер-Ваальса. Поправка a/V^2 характеризует ту добавку к внешнему давлению, которая возникает из-за взаимного притяжения молекул друг к другу. В силу того, что молекулы обладают конечным объемом, пространство, доступное для движения молекул, оказывается меньше, чем объем сосуда V. Константа b характеризует ту часть объема, которая недоступна для движения молекул.
Внутренняя энергия ван-дер-ваальсовского газа.

$$U = \nu C_V T - \frac{\nu a}{V}\,.$$

Решение задач

8.1. Какую температуру имеет масса $m = 2$г азота, занимающего объем $V = 820\text{м}^3$ при давлении $p = 0,2$МПа? Газ рассмотреть как: а) идеальный; б) реальный. Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота: $a = 0,136$ Па $\cdot\,\text{м}^6/\text{моль}^2$, $b = 3,85 \cdot 10^{-5}\text{м}^3/\text{моль}$.

Решение **:** а) Из уравнения состояния идеального газа $PV = (m/M)RT$ получаем $T = MpV/mR = 276$К;
б) для реального газа (газ Ван-дер-Ваальса)

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V - \nu b\right) = \nu RT\,,$$

откуда

$$T = \frac{1}{\nu R}\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V - \nu b\right) = 276K\,.$$

При данном давлении газ ведет себя как идеальный.
8.2. Найти работу, совершаемую одним молем газа Ван-дер-Ваальса при изотермическом расширении его от объема V_1 до V_2 при температуре T.

Решение **:** По определению работы имеем

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)dV = RT\ln\frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right).$$

Задачи

8.3. Какую температуру T имеет масса $m = 3,5$г кислорода, занимающего объем $V = 90\text{см}^3$ при давлении $p = 2,8$МПа. Газ рассматривать как: а)идеальный; б)реальный. Постоянные Ван-дер-Ваальса для кислорода: $a = 0,136\text{Па} \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2$, $b = 3,16 \cdot 10^{-5}\text{м}^3/\text{моль}$.
Ответ: а) $T = 277$К; б) $T = 285,7$К.
8.4. Какую температуру T имеет масса $m = 10$г гелия, занимающего объем $V = 100\text{см}^3$ при давлении $p = 100$МПа. Газ рассматривать как: а)идеальный; б)реальный. Постоянные Ван-дер-Ваальса

для гелия: $a = 0,00343$Па $\cdot$ м^6/моль^2, $b = 2,34 \cdot 10^{-5}$м^3/моль.
Ответ: а) $T = 482$ К; б) $T = 204$ К.

8.5. Количество $\nu = 1$кмоль углекислого газа находится при температуре $t = 100°$C. Найти давление p газа, считая его: а) реальным; б) идеальным. Задачу решить для объемов $V_1 = 1$м^3 и $V_1 = 0,05$м^3 ($a = 0,364$Па $\cdot$ м^6/моль^2, $b = 4,26 \cdot 10^{-5}$м^3/моль.)
Ответ: а) при $V = V_1$, $p = 3,09$МПа, при $V = V_2$, $p = 271$МПа б) при $V = V_1$, $p = 2,87$МПа, при $V = V_2$, $p = 61,8$МПа.

8.6.В закрытом сосуде объемом $V = 0,5$м^3 находится количество $\nu = 0,6$кмоль углекислового газа при давлении $p_1 = 3$МПа. Пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса, найти во сколько раз надо увеличить температуру газа, чтобы давление увеличилось вдвое.
Ответ: $T_1/T_2 = 1,85$.

8.7.Для водорода силы взаимодействия между молекулами незначительны; преимущественную роль играют собственные размеры молекул. Поэтому в уравнении Ван-дер Ваальса можно пренебречь постоянной a. Какая относительная ошибка δ будет допущена при нахождении количества водорода ν, находящегося в некотором объеме при температуре $t = 0°$C и давлении $p = 280$МПа не учитывая собственного объема молекул. ($b = 2,63 \cdot 10^{-5}$м^3/моль^2).
Ответ: $\delta = 0,33$.

8.8. Один моль кислорода расширили от объема $V_1 = 1$л до $V_2 = 5$л при постоянной температуре $T = 280$К. Вычислить количество поглощенного газом тепла. Газ считать ван-дер-ваальсовским.
Ответ: $Q = RT \ln \dfrac{V_2 - b}{V_1 - b} = 3,8$кДж.

8.9. Количество $\nu = 0,5$ кмоль некоторого газа занимает объем $V_1 = 1$м^3. При расширении газа до объема $V_2 = 1,2$м^3 была совершена работа против сил взаимодействия молекул $A = -5,684$кДж. Найти постоянную a Ван-дер-Ваальса.
Ответ: $a = -\dfrac{AV_1V_2}{\nu^2(V_2 - V_1)} = 0,136$Па $\cdot$ м^6/моль^2.

8.10. Какое количество тепла надо сообщить $\nu = 3,0$ моль углекислого газа, чтобы при расширении в вакуум от объема $V_1 = 5$л до $V_2 = 10$л температура его не изменилась. Газ считать ван-дер-ваальсовским.
Ответ: $Q = \dfrac{\nu^2 a(V_2 - V_1)}{V_1V_2} = 0,33$кДж.

8.11.В сосуде объемом $V = 10$л находится масса $m = 0,25$кг азота при температуре $t = 27°$C. Какую часть давления газа p составляет давление p_i, обусловленное силами взаимодействия.
Ответ: $p_i/p = 1/(RTV/\nu a - 1) = 0,96$.

9. Энтропия

Энтропия. Энтропией называется функция S состояния макросистемы, приращение которой в элементарном обратимом процессе равно отношению количества теплоты, сообщенного системе, к абсолютной температуре последней

$$dS = \frac{d'Q}{T}\,.$$

При произвольном обратимом переходе системы из состояния 1 в состояние 2 изменение энтропии равно

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{d'Q}{T}\,.$$

Приращение энтропии при переходе системы из одного равновесного состояния в другое в результате необратимого процесса равно приращению, которое получает энтропия при любом обратимом процессе между теми же состояниями.
Второй закон термодинамики. В изолированной системе энтропия может или расти для необратимых процессов, или оставаться постоянной для обратимых процессов

$$\Delta S \geqslant 0\,.$$

Связь между энтропией и статистическим весом. Если W - статистический вес данного макросостояния, т.е. число микроскопических способов, которым данное макросостояние может быть осуществлено, то

$$S = k \ln W\,.$$

Решение задач

9.1. Найти энтропию S для ν молей идеального газа, занимающего объем V при температуре T.

Решение **:** Запишем первый закон термодинамики при бесконечно малом изменении состояния

$$d'Q = dU + pdV$$

где $d'Q$ количество тепла, полученное газом при температуре T, $U = \nu C_V T$ - внутренняя энергия и p - давление. При обратимом процессе $d'Q = TdS$, откуда

$$dS = \nu C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV\,.$$

Для идеального газа $p/T = \nu R/V$, поэтому

$$\begin{aligned} dS &= \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V} = d\Big(\nu C_V \ln T\Big) + d\Big(\nu R \ln V\Big) = \\ &= d(\nu C_V \ln T + \nu R \ln V)\,. \end{aligned}$$

Откуда, из равенства дифференциалов получаем

$$S(T, V) = \nu C_V \ln T + \nu R \ln V + S_0\,,$$

где S_0 - произвольная постоянная. Последнее равенство выражает энтропию в переменных $(S,\, V)$. Изменение энтропии при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 в этом случае равно

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}\,.$$

9.2. Записать выражение для энтропии идеального газа в переменных температура -давление $(T,\, p)$.

Решение **:** Исходим из выражения

$$S = \nu C_V \ln T + \nu R \ln V + S_0\,.$$

Исключим объем с помощью уравнения состояния $V = \nu RT/p$, тогда

$$\begin{aligned} S &= \nu C_V \ln T + \nu R \ln \frac{\nu RT}{p} + S_0 = \\ &= \nu(C_V \ln T + R \ln T) - \nu R \ln p + S_0 + \nu R \ln \nu R \end{aligned}$$

или, вводя константу $S_1 = S_0 + \nu R \ln \nu R$ и учитывая что $C_V + R = C_p$, получим

$$S(T, p) = \nu C_p \ln T - \nu R \ln p + S_1\,.$$

Для изменения энтропии будем иметь в этом случае

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \nu R \ln \frac{p_2}{p_1}\,.$$

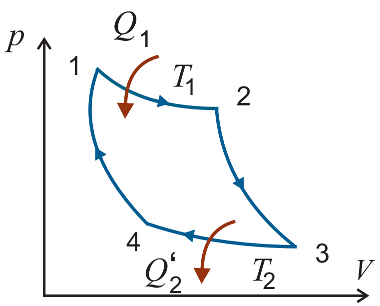

Рис. 28.

9.3. Записать выражение для энтропии идеального газа в переменных давление-объем (p, V).

Решение **:** Исходим из выражения

$$S = \nu C_V \ln T + \nu R \ln V + S_0\,.$$

Исключим температуру с помощью уравнения состояния $T = pV/\nu R$, после подстановки в последнее равенство получим

$$S(p, V) = \nu C_V \ln p + \nu C_p \ln V + S_2\,,$$

где введено обозначение для константы $S_2 = S_0 - \nu C_V \ln \nu R$.

9.4. Идеальный газ совершает циклический процесс, состоящий из двух изотерм ($1 \to 2$, $3 \to 4$) и двух адиабат ($2 \to 3$, $4 \to 1$) (см рис. 28). На верхней изотерме газ получает тепло от внешнего окружения , а на нижней отдает (Цикл Карно). Найти количество теплоты Q, которое в этом цикле превращается в работу, если изменение энтропии на участке между двумя адиабатами равно $\Delta S = 4,19$кДж/К, а разность температур между двумя изотермами $\Delta T = T_1 - T_2 = 100$К.

Решение **:**Поскольку процесс замкнутый, изменение внутренней энергии равно нулю. Тогда. согласно первому закону термодинамики, работа равна $A = Q_1 - Q_2'$ ($Q_2' > 0$). Вдоль изотермы $1 \to 2$ полученное тепло равно

$$Q_1 = \int_{S_1}^{S_2} T dS = T_1(S_2 - S_1) = T_1 \Delta S\,,$$

где $S_{1,2}$ - энтропии состояний 1 и 2.
Поскольку вдоль адиабат газ теплоизолирован, то вдоль участков $2 \to 3$ и $4 \to 1$ $dS = d'Q/T = 0$ и, следовательно, энтропия не меняется. Так, что в состоянии 3 энтропия равна S_2, а в состоянии 4 - S_1. Поэтому, тепло отданное на нижней изотерме равно

$$-Q' = \int_{S_2}^{S_1} T dS = T_2(S_1 - S_2) = -T_2 \Delta S\,.$$

В результате получаем

$$A = Q_1 - Q_2' = \Delta T \Delta S = 419\text{кДж}\,.$$

Задачи

9.5. Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы $m = 8$г кислорода от объема $V = 10$л при температуре $t_1 = 80°$C к объему $V = 40$л при температуре $t_2 = 300\circ$C.
Ответ: $\Delta S = 5,4$Дж/К.

9.6. Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы $m = 6$г водорода от объема $V_1 = 20$л под давлением $p_1 = 150$кПа к объему $V_2 = 60$л под давлением $p_2 = 100$кПа.
Ответ: $\Delta S = 71$Дж/К.

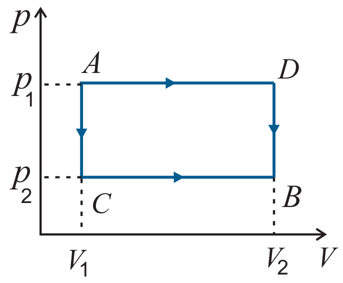

Рис. 29.

9.7. Масса $m = 6,6$г водорода расширяется изобарически от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Найти изменение энтропии ΔS при этом расширении, если возбуждены поступательные и вращательные степени свободы.
Ответ: $\Delta S = 66,3$Дж/К.

9.8. Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении массы $m = 8$г гелия (одноатомный газ) объема $V_1 = 10$л до объема $V_2 = 25$л.
Ответ: $\Delta S = (m/M)(5/2)R\ln(V_2/V_1) = 38,1$Дж/К.

9.9. Найти изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении массы $m = 6$г водорода от давления $p_1 = 100$кПа до давления $p_2 = 50$кПа
Ответ: $\Delta S = 17,3$Дж/К.

9.10. Масса $m = 10$г кислорода нагревается от температуры $t_1 = 50°$C до температуры $t_2 = 150°$C. Найти изменение энтропии ΔS, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.
Ответ: а)$\Delta S = \dfrac{5}{2}\dfrac{m}{M}R\ln\dfrac{T_2}{T_1} = 1,75$Дж/К; б)$\Delta S = \dfrac{7}{2}\dfrac{m}{M}R\ln\dfrac{T_2}{T_1} = 2,45$Дж/К.

9.11. Идеальный газ переходит из состояния A, в котором он занимал объем V_1 при давлении p_1, в состояние B с объемом V_2 и давлением p_2 (см. рис. 29). Найти изменение энтропии, если переход совершался: а) по участку ACB; б) по участку ADB.
Ответ: $(\Delta S)_{ACB} = (\Delta S)_{ADB} = \nu C_p \ln(V_2/V_1) + \nu C_V \ln(p_2/p_1)$.

9.12. Воздух, находящийся при температуре $t_1 = 0°$C и давлении $p_1 = 98$кПа, изотермически расширился от объема $V_1 = 1$м^3 до объема $V_2 = 2V_1$. Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{p_1 V_1}{T_1} \ln \dfrac{V_2}{V_1} = 249$Дж/К.

9.13. Четыре моля идеального газа в обратимом процессе изотермически расширили от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Найти: а) работу, совершенную газом; б) приращение энтропии. Каково изменение энтропии при обратимом адиабатическом расширении.

Ответ: 9,22кДж; 23,1Дж/К; 0.

9.14. Два моля идеального газа сначала изохорочески охладили, а затем изобарически расширили, так что температура газа стала равной первоначальной. Найти приращение энтропии газа если его давление в данном процессе изменилось в $n = 3,3$ раза.

Ответ: $\Delta S = 2R \ln n$

9.14. Найти приращение энтропии двух молей идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1,3$, если в результате некоторого процесса объем газа увеличился в $\alpha = 2,0$ раза, а давление уменьшилось в $\beta = 3,0$ раз.

Ответ: $\Delta S = \nu R(\gamma - 1)^{-1}(\gamma \ln \alpha - \ln \beta)$.

9.15. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает процесс $p = p_0 - \alpha V$, где p_0 и α положительные постоянные, V - объем. При каком значении объема энтропия газа окажется максимальной.

Ответ: $V_{\text{extr}} = \dfrac{\gamma p_0}{\alpha(\gamma + 1)}$.

Таблица 1. Постоянные газов (при нормальных условиях)

Газ	молярная масса(г/моль)	$\gamma = C_p/C_V$
He	4	1.67
Ar	40	1.67
H_2	2	1.41
N_2	28	1.40
O_2	32	1.40
CO_2	44	1.30
HO_2	18	1.32
Воздух	29	1.40

Таблица 2. Постоянные Ван-Дер-Ваальса(при нормальных условиях)

Газ	a(Па · м^6/моль^2)	$b \cdot 10^{-6}$(м^3/моль)
Ar	0,132	32
H_2	0,024	27
N_2	0,137	39
O_2	0,137	32
CO_2	0,367	43
HO_2	0,554	30

Литература

1. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. В 2-х кн. М.: "Олимп": ООО "Фирма "Издательство АСТ 1999.
2. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. М.: НТЦ "ВЛАДИС 1997.
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики СПб.: Издательство "Лань 2008.
4. *Иродов И.Е.* Механика. Основные законы, 5-е изд. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000.
5. *Walker J., Halliday D., Resnick R.* Fundamentals of Physics. John Willey and Sons, Inc., 2014.

Учебное издание

ЗАДАЧИ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

Бухбиндер
Геннадий Львович

Санитарно-гигиенический сертификат №
Редактор *???*
Технический редактор *Н.С. Серопян*
Дизайн обложки *???*

Подписано в печать ??? Формат 60 × 84 1/16.
Печ. л. ???. Усл. печ. л. ??. Уч.-изд. л. ??. Тираж ??экз. Заказ
Издательство Омского государственного университета
644077, Омск-77, пр. Мира, 55а