ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Бухбиндер Г.Л.

Издание ОмГУ **Омск 2011**

Г.Л.Бухбиндер. Ведение в теорию обобщенных функций. Омск: Омск. ун-т, 2011.

Для студентов физического факультета.

Содержание

§1. Основные и обобщенные функции

Функция $\varphi(x)$, определенная на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, называется финитной, если она обращается в нуль вне конечного интервала $[a,b]$: $\varphi(x) \neq 0$, если $a < x < b$ и $\varphi(x) = 0$, если $x \leqslant a$ и $x \geqslant b$. Сам интервал $[a,b]$ называется носителем функции $\varphi(x)$. Постоянные a и b зависят от $\varphi(x)$.

Пусть $\mathcal{D}$ есть множество финитных и бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций. Очевидно, что где $\mathcal{D}$ есть линейное пространство.

Пример. Функция (шапочка)(рис.1)

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-a^2/(a^2-x^2)}, & \text{если} |x| < a \\ 0, & \text{если} |x| \geqslant a \end{cases} \tag{1}$$

является финитной. Действительно, $\varphi_a(x) \to 0$ при $x \to \pm a \mp 0$ и $\varphi_a(x) = 0$ при $|x| \geqslant a$.

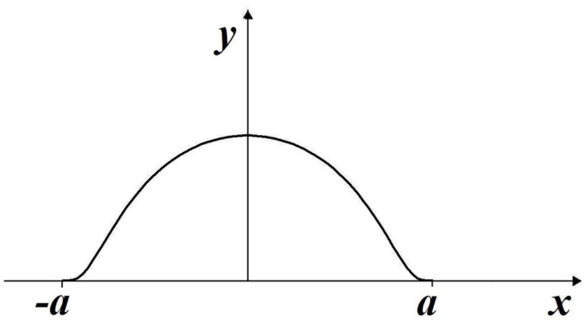

Рис. 1.

Найдем производную

$$\varphi_a'(x) = -\frac{2a^2 x}{a^2 - x^2} e^{-a^2/(a^2-x^2)}$$

и

$$\lim_{x\to a+0} \varphi_a'(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to a-0} \varphi_a'(x) = -\lim_{x\to a-0} \frac{2a^3}{(a^2-x^2)} e^{-a^2/(a^2-x^2)} = 0$$

Следовательно $\varphi_a'(x)$ непрерывна при $x = a$. Аналогично доказывается и непрерывность $\varphi_a'(x)$ при $x = -a$ и непрерывность $\varphi_a^{(k)}(x)$ при $k \geqslant 2$.

Говорят, что последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$, где $\varphi_n(x) \in \mathcal{D}$ при всех n, сходится к функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$,

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x), \quad n \to \infty\,,$$

если

1. Носители всех $\varphi_n(x)$ лежат внутри некоторого отреза $[a,b]$;
2. При любом $k \geqslant 0$ последовательность $\varphi_n^{(k)}(x)$ равномерно на $\mathbb{R}$ сходится к $\varphi^{(k)}(x)$.

Линейное пространство $\mathcal{D}$ с введенной сходимостью называется пространством основных функций.

Пространство обобщенных функций

Пусть каждой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ поставлено в соответствие комплексное число (f, φ), причем для любых двух чисел α и β и любых $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ выполняется равенство

$$(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi).$$

Тогда говорят, что на $\mathcal{D}$ определен линейный функционал f.

Функционал f называется непрерывным, если из сходимости $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x)$ при $n \to \infty$ следует сходимость числовой последовательности

$$(f, \varphi_n) \to (f, \varphi), \quad n \to \infty\,.$$

Множество всех линейных непрерывных функционалов обозначим через $\mathcal{D}'$.

Пусть f_1 и $f_2 \in \mathcal{D}'$ и α, β - комплексные числа. Тогда по определению, линейная комбинация функционалов $\alpha f_1 + \beta f_2$ определяется как функционал, действующий на любую $\varphi \in \mathcal{D}$ по правилу

$$(\alpha f_1 + \beta f_2, \varphi) = \alpha(f_1, \varphi) + \beta(f_2, \varphi) \tag{2}$$

Задача. Показать, что функционал, определяемый равенством (2) является линейным и непрерывным.

Если функция $f(x)$ абсолютно и интегрируема на любом конечном отрезке (локально интегрируема), то тона порождает функционал

$$(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx\,. \tag{3}$$

Задача. Показать, что интеграл (3) сходится.

Функционалы, задаваемые в виде равенства (3) называются регулярными.

Лемма. Если $f(x)$ локально интегрируема, то (3) определяет линейный и непрерывный функционал.

Доказательство. Линейность функционала (3) следует из линейности интеграла относительности φ. Докажем непрерывность. Пусть $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x)$ при $n \to \infty$, тогда носители всех φ_n лежат внутри некоторого отрезка $[a, b]$ и $\sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$(f, \varphi_n) - (f, \varphi) \leqslant |(f, \varphi_n) - (f, \varphi)| = \Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)[\varphi_n(x) - \varphi(x)]dx\Big|$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)||\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \leqslant \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int\limits_{a}^{b} |f(x)| \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, $(f, \varphi_n) \to (f, \varphi)$ при $n \to \infty$, т.е. функционал (3) непрерывен.

Линейные, непрерывные функционалы, не являющиеся регулярными, называются *сингулярными*.

Определение. Линейный непрерывный функционал (f,φ) заданный на $\mathcal{D}$ называется обобщенной функцией. Множество всех линейных непрерывных функционалов $\mathcal{D}'$ называется пространством обобщенных функций.

Если функционал (f,φ) является регулярным т.е.

$$(f,\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx\,, \tag{4}$$

то обобщенную функцию (f,φ) также обозначают как $f(x)$ или f.

§2. Дельта-функция

Определим функционал (δ,φ), действующий по правилу

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0)\,, \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}\,. \tag{5}$$

Функционал (4) является непрерывным. Действительно, пусть

$$\varphi_n(x) \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi(x)\,, \qquad n\to\infty\,.$$

Тогда

$$(\delta,\varphi_n) = \varphi_n(0) \ \to \varphi(0) = (\delta,\varphi)\,.$$

Функционал (4) является сингулярным. Пусть существует такая локально интегрируемая функция $f(x)$, что для всех $\varphi\in\mathcal{D}$

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx\,. \tag{6}$$

В частности, (6) должно выполняться для $\varphi_a(x)$ из (1), для которой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_a(x)\,dx = \varphi_a(0) = e^{-1}\,. \tag{7}$$

Но интеграл в (7) при $a\to 0$ стремится к нулю, так как

$$|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_a(x)\,dx\big| \leqslant \varphi_a(0)\int\limits_{-a}^{a}|f(x)|\,dx \to 0 \qquad a\to 0\,,$$

что противоречит равенству (7). Таким образом, функционал (δ,φ) является сингулярным. Обобщенная функция (δ,φ), определенная в (5), называется δ-функцией.

§3. Сходимость в пространстве $\mathcal{D}'$

Говорят, что последовательность обобщенных функций $\{f_n\}$, сходится в $\mathcal{D}'$ к обобщенной функции f: $f_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} f$, $n\to\infty$, если для любой основной функции $\varphi\in\mathcal{D}$ сходится числовая последовательность

$$(f_n,\varphi) \to (f,\varphi) \qquad n\to\infty\,. \tag{8}$$

Такую сходимость функционалов называют слабой сходимостью.

Вместо последовательности f_n, рассматриваются последовательности функционалов $\{f_\varepsilon\}$, зависящих от параметра ε. Говорят, что $f_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ при $\varepsilon \to 0$, если для любого $\varphi(x) \in \mathcal{D}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f_\varepsilon, \varphi) \to (f, \varphi) \qquad \varepsilon \to 0\,. \tag{9}$$

Замечание. Часто оказывается, что функционалы f_n и f_εявляются регулярными, а предельный функционал f в (8) или (9) - сингулярный. Другими словами, существуют обычные функции f_n и f_ε, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(f_n, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx \qquad \text{или} \qquad f_\varepsilon, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx\,, \tag{10}$$

и в то же время для предельного функционала (f, φ) интегрального представления типа (10) не существует. В этом случае для удобства также вводится обозначение для обобщенной функции (f, φ) как $f(x)$, понимая под этим пределы

$$f(x) = \lim_{n\to 0} f_n(x) \qquad \text{или} \qquad f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x)\,, \tag{11}$$

но с дополнительным условием, определяющим правило интегрирования функции $f(x)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = (f, \varphi)$$

Функционал соответствующий произвольной обобщенной функции $f(x)$ обозначают также как $(f(x), \varphi(x))$.

Пример. Пусть $f_n(x)$ обычные функции вида (рис.2)

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & -\dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{n}\,, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0\,. \end{cases} \tag{13}$$

Кроме того

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int\limits_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2}dx = \frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n} = 1\,.$$

Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{D}$ - произвольная основная функция. Тогда рассмотрим регулярный функционал

$$(f_n, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \frac{n}{2}\int\limits_{-1/n}^{1/n} \varphi dx\,.$$

При $n \to \infty$ имеем по теореме о среднем

$$(f_n, \varphi) = \frac{n}{2}\,\varphi(c_n)\frac{2}{n} = \varphi(c_n)\,, \qquad -\frac{1}{n} < \varphi(c_n) < \frac{1}{n}\,.$$

При $c_n \to 0$ и в силу непрерывности $\varphi(x)$, $\varphi(c_n) \to \varphi(0)$. Таким образом, при $n \to \infty$

$$(f_n, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx \to \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

и следовательно $f_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} \delta$.

В соответствии с обозначением (11) и равенством (13) введем для обобщенной функции (δ, φ) обозначение

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0\,. \end{cases}$$

с дополнительным условием

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = (\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)\,.$$

Кроме того, определим интеграл от $\delta(x)$ как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = 1$$

Пусть интервал (a, b) не включает точку $x = 0$ Тогда

$$\int\limits_{a}^{b} \delta(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f_n(x)dx = 0\,,$$

так так, начиная с некоторого n интервал $[-\frac{1}{n},\, \frac{1}{n}]$, в котором отлична от нуля функция $f_n(x)$, не будет входить в отрезок $(a,\, b)$. Таким образом, если отрезок $(a,\, b)$ не включает точку $x = 0$, то интеграл от $\delta(x)$ по $(a,\, b)$ равен нулю.

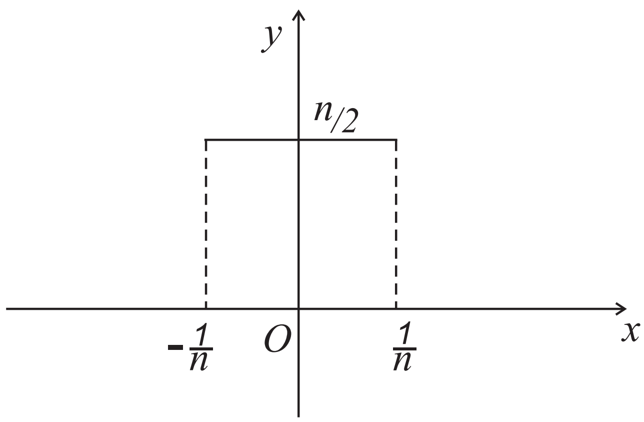

Рис. 2.

§4. Дельтаобразные последовательности

Последовательности регулярных функционалов (f_n, φ), сходящихся к δ- функции можно построить многими способами.

Пример 1. Рассмотрим семейство обычных функций

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,, \quad \varepsilon \to +0\,. \tag{14}$$

График функции $f_\varepsilon(x)$ изображен на рис.3.

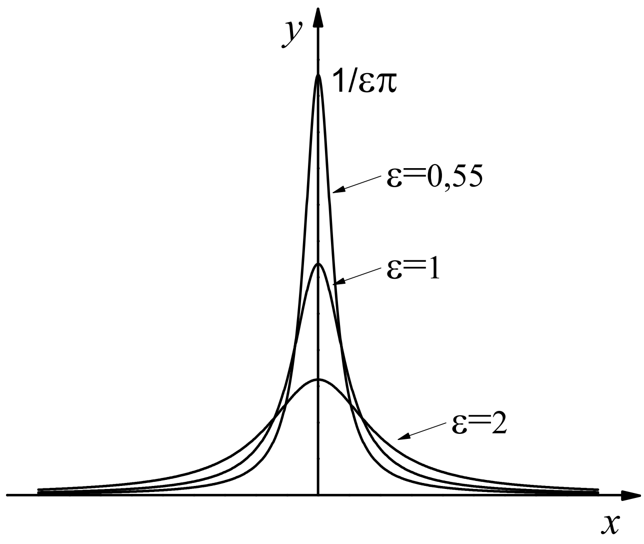

Рис. 3.

Для любого ε имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x))dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\varepsilon}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1\,.$$

Кроме того

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0\,. \end{cases}$$

Функции $f_\varepsilon(x)$ порождают регулярный функционал f_ε

$$(f_\varepsilon\,, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \tag{15}$$

и обобщенную функцию $f_\varepsilon(x)$. Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f_\varepsilon\,, \varphi) = \varphi(0) = (\delta\,, \varphi)\,.$$

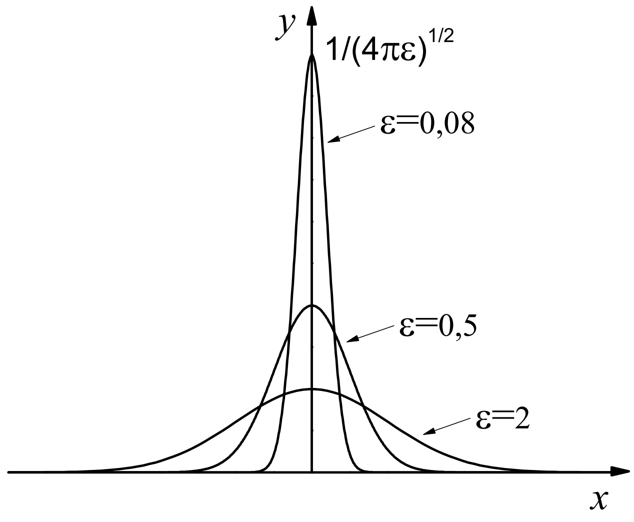

Рис. 4.

Для этого сделаем замену переменных в (15), $x = \varepsilon y$, $dx = \varepsilon dy$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f_\varepsilon\,,\varphi) \;=\; \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}dx = \frac{\varphi(0)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}dx =$$

$$\frac{\varphi(0)}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\varepsilon}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = \varphi(0)\,,$$

откуда следует сходимость последовательности обобщенных функций

$$f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0\,. \end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим семейство функций (рис.4)

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}e^{-x^2/4\varepsilon} \qquad \varepsilon \to 0\,,$$

для которых

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} = 1$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0\,. \end{cases}$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f_\varepsilon\,,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4\varepsilon}\varphi(x)\frac{dx}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} = \left| y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\;, dy = \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon}}\right| =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y)dy = \varphi(0)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/4}dy = \varphi(0)\,.$$

Итак
$$(f_\varepsilon\,,\varphi) \to (\delta\,,\varphi) = \varphi(0) \qquad \varepsilon \to 0$$
и следовательно при $\varepsilon \to 0$
$$f_\varepsilon(x) \overset{\mathcal{D}'}{\to} \delta(x)\,.$$

Пример 3. Рассмотрим функции вида (рис.5)
$$f_L(x) = \frac{\sin Lx}{\pi x} \qquad L \to \infty\,,$$
для которых
$$\lim_{L\to\infty} f_L(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0\,. \end{cases}$$
Легко видеть, что

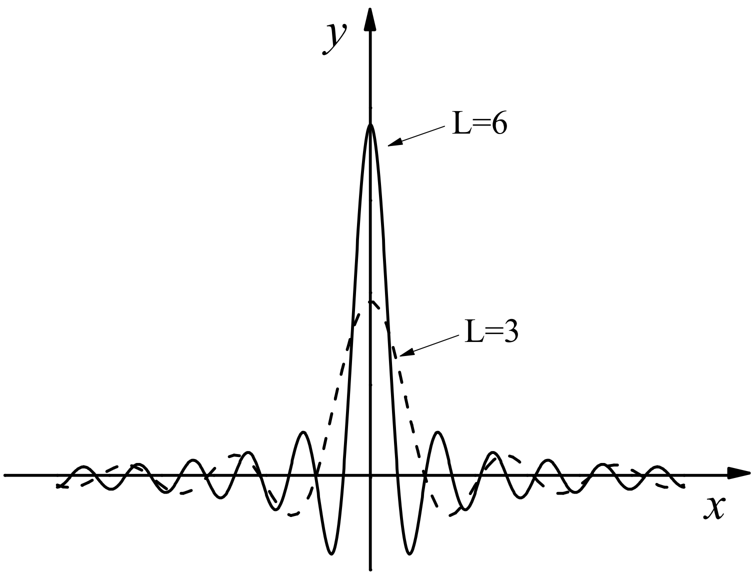

Рис. 5.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Lx}{\pi x} dx = \big|y = xL\big| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{\pi y} dy = 1\,.$$

Аналогично рассмотренным примерам, можно показать, что для регулярных функционалов, порождаемых $f_L(x)$, существует предел
$$(f_L\,,\varphi) \to (\delta\,,\varphi) = \varphi(0) \qquad L \to \infty\,.$$
и следовательно при $L \to \infty$
$$f_L(x) \overset{\mathcal{D}'}{\to} \delta(x)\,.$$
Таким образом
$$\lim_{L\to\infty} \frac{\sin Lx}{\pi x} = \delta(x) \qquad \text{в } \mathcal{D}'\,.$$

Установим еще одно равенство. Так как

$$\int_{-L}^{L} e^{itx}dt = 2\pi\frac{\sin Lx}{\pi x}\,,$$

то

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} e^{itx}dt \quad &= \quad \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dt = 2\pi\lim_{L\to\infty}\frac{\sin Lx}{\pi x} = 2\pi\delta(x)\\ &=\end{aligned}$$

в $\mathcal{D}'$. Это равенство записывают также как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dt = 2\pi\delta(x)\,,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

§5. Умножение обобщенных функций

Пусть $f\in\mathcal{D}'$ - обобщенная функция, а $\psi(x)$ бесконечно дифференцируемая функция. По определению ψf есть обобщенная функция, действующая на произвольную функцию $\varphi\in\mathcal{D}$ по правилу

$$(\psi f\,,\varphi) = (f\,,\psi\varphi)\,. \tag{16}$$

Обобщенная функция f равна нулю на $(a\,,b)$, если для любого $\varphi\in\mathcal{D}$ носитель которой лежит в $(a\,,b)$ выполняется равенство

$$(f\,,\varphi) = 0\,.$$

Пример. $\delta(x)=0$ на любом интервале $(a\,,b)$, не содержащем точку $x=0$. Действительно, для любого ψ носитель которой лежит в $(a\,,b)$

$$(\delta\,,\varphi) = \varphi(0) = 0\,.$$

Две обобщенные функции f_1 и f_2 называются равными на интервале $(a\,,b)$, если $f_1-f_2=0$ на $(a\,,b)$, т.е. для любых $\varphi\in\mathcal{D}$, с носителем в $(a\,,b)$

$$(f_1-f_2\,,\varphi)=0 \quad \text{или} \quad (f_1\,,\varphi)=(f_2\,,\varphi)\,.$$

Пример. Рассмотрим произведение $\psi(x)\delta(x)$, где $\psi\in\mathcal{D}$. Тогда для всех $\varphi(x)\in\mathcal{D}$

$$(\psi\delta\,,\varphi) = (\delta\,,\psi\varphi) = \psi(0)\varphi(0) = (\delta\,,\psi(0)\varphi) = (\psi(0)\delta\,,\varphi)\,,$$

откуда получаем

$$\psi(x)\delta(x) = \psi(0)\delta(x)\,.$$

В частности, $x\delta(x) = 0$.

§6. Линейная замена переменных в обобщенных функциях

Пусть $f(x)$ локально интегрируемая функция , порождающая обобщенную функцию $(f\,,\varphi)$

$$(f(x)\,,\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)$$

и $y = ax + b$ линейное преобразование переменной x, где a и b некоторые постоянные. Определим обобщенную функцию $f(ax+b)$ посредством равенства

$$\begin{aligned}(f(ax+b)\,,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b)\varphi(x) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(\frac{y-b}{a})dy = \\ &= \frac{1}{|a|}\Big(f(x)\,,\varphi\Big(\frac{x-b}{a}\Big)\Big)\,.\end{aligned}$$

Итак

$$(f(ax+b)\,,\varphi) = \frac{1}{|a|}\Big(f(x)\,,\varphi\Big(\frac{x-b}{a}\Big)\Big)\,. \qquad (17)$$

Равенство (17) берется за определение обобщенной функции $f(ax+b)$ для любых $f \in \mathcal{D}'$.

Примеры.

1) Сдвиг независимой переменной $y = x - a$.

$$(f(x-a)\,,\varphi) = (f\,,\varphi(x+a))\,.$$

Пусть $f(x) = \delta(x)$, тогда

$$(\delta(x-a)\,,\varphi) = (\delta(x)\,,\varphi(x+a)) = \varphi(a)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a)\,.$$

2) $(\delta(ax-b)\,,\varphi) = \dfrac{1}{|a|}\Big(\delta\,,\varphi\Big(\dfrac{x+b}{a}\Big)\Big) = \dfrac{1}{|a|}\varphi\Big(\dfrac{b}{a}\Big)$ или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax-b)\varphi(x)dx = \frac{1}{|a|}\varphi\Big(\frac{b}{a}\Big)\,.$$

3) Отражение в начале координат $y = -x$.

$$(f(-x)\,,\varphi) = (f(x)\,,\varphi(-x))\,.$$

Пусть $f(x) = \delta(x)$, тогда для любого $x \in \mathcal{D}$

$$(\delta(-x)\,, \varphi) = (\delta(x)\,, \varphi(-x)) = \varphi(0) = (\delta(x)\,, \varphi)\,.$$

Откуда $\delta(-x) = \delta(x)$.

§7. Нелинейная замена переменных в обобщенных функциях

Пусть $a(x)$ бесконечно дифференцируемая функция, имеющая простой корень в точке x_0, т.е. $a(x_0) = 0$. Определим обобщенную функцию $\delta(a(x))$ как предел

$$\delta(a(x)) = \lim_{n\to\infty} f_n(a(x)) \quad \text{в} \;\; \mathcal{D}' \tag{18}$$

где

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & |x| < \dfrac{1}{n} \\ \\ 0, & |x| \geqslant \dfrac{1}{n}\,, \end{cases} \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots$$

Равенство (18) означает, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ имеет место равенство

$$(\delta(a(x))\,, \varphi) = \lim_{n\to\infty} (f_n(a(x))\,, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(a(x))\varphi(x)dx \tag{19}$$

Функция $f_n(a(x))$ отлична от нуля только в области, определяемой неравенством $|a(x)| < 0$. При достаточно больших n это неравенство может выполняться только в окрестности нуля функции $a(x)$ (см. рис.6). Обозначим эту окрестность как $(x_0 + \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$. Причем, если функция $a(x)$ возрастает внутри этой окрестности, то $a(x_0 \pm \varepsilon) = \pm 1/n$, а если

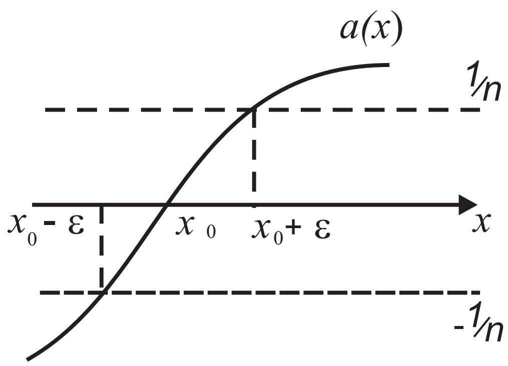

Рис. 6.

убывает, то $a(x_0 \pm \varepsilon) = \mp 1/n$. Для достаточно малых ε можно считать, что $a(x)$ ведет себя монотонно и сделать замену $y = a(x)$ в (19), для которой существует обратная функция $x = a^{-1}(y)$, такая, что $x_0 = a^{-1}(0)$. Тогда, используя теорему о среднем, будем иметь

$$(\delta(a(x)), \varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f_n(a(x))\varphi(x)dx = \Big| y = a(x) \Big| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a(x_0-\varepsilon)}^{a(x_0+\varepsilon)} f_n(y)\frac{\varphi(a^{-1}(y))}{a'(a^{-1}(y))}dy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1/n)}^{1/n} f_n(y)\frac{\varphi(a^{-1}(y))}{|a'(a^{-1}(y))|}dy$$

$$= \frac{\varphi(a^{-1}(0))}{|a'(a^{-1}(0))|} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1/n)}^{1/n} f_n(y)dy = \frac{\varphi(x_0)}{|a'(x_0)|} = \Big(\frac{\delta(x-x_0)}{|a'(x_0)|}, \varphi\Big).$$

Таким образом

$$\delta(a(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|a'(x_0)|}. \tag{20}$$

Пусть$[a,\, b]$ носитель $\varphi \in \mathfrak{D}$, не содержащий нуля $a(x)$ (рис.7). Тогда

$$(\delta(a(x)), \varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(a(x))\varphi(x)dx = 0\,,$$

так как при достаточно больших значениях $n \gg 1$ $f_n(a(x)) = 0$ в $[a,\, b]$.

Пусть теперь $a(x)$ имеет изолированные простые нули x_k, $k = 1,\, 2,\, \ldots$. В этом случае

$$(\delta(a(x)), \varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(a(x))\varphi(x)dx = \sum_k \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k+\varepsilon_k} f_n(a(x))\varphi(x)dx\,,$$

так как $f_n(a(x)) \neq 0$ только в областях $(x_k - \varepsilon_k,\, x_k + \varepsilon_k)$, где $|a(x)| < 1/n$, причем $a(x_k \pm \varepsilon_k) = \pm 1/n$ или $\mp 1/n$ (см. рис.8). Произведя замену в каждом интервале $(x_k - \varepsilon_k,\, x_k + \varepsilon_k)$, аналогично тому как это было сделано в (20),получим

$$(\delta(a(x)), \varphi) = \Big(\sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|}, \varphi\Big)\,.$$

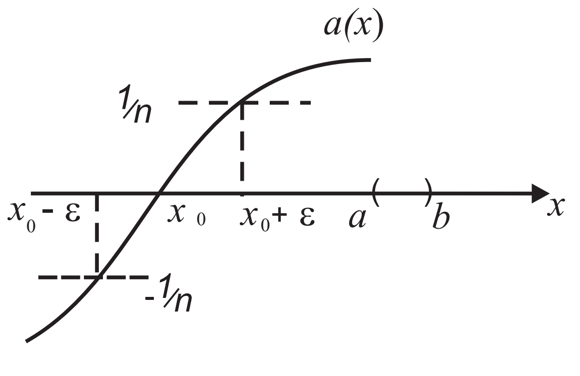

Рис. 7.

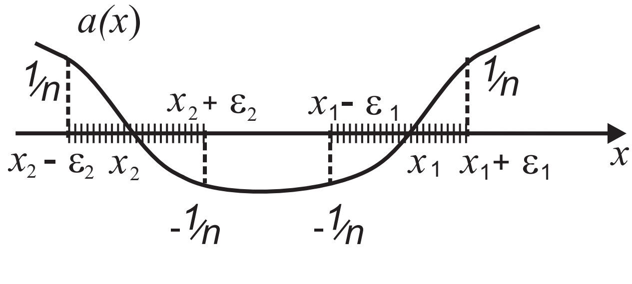

Рис. 8.

Откуда

$$\delta(a(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|}\,.$$

Замечание. В качестве последовательности f_n может быть взята любая последовательность, сходящаяся к дельта-функции.
Пример.

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]\,.$$

§8. Дифференцирование обобщенных функций

Пусть $f(x)$ непрерывная и дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, тогда $f'(x)$ порождает регулярный функционал

$$\begin{aligned}(f',\,\varphi) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)df(x) = \\ &= \varphi(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx\,.\end{aligned}$$

Так как $\varphi(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$, то

$$(f',\,\varphi) = -(f,\,\varphi'), \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D} \tag{21}$$

Равенство (21) берется за определение производной обобщенной функции.

Определение. Производной обобщенной функции $f\in\mathcal{D}'$ называется линейный и непрерывный функционал $f'\in\mathcal{D}'$, действующий на основные функции $\varphi\in\mathcal{D}$ по правилу (21).

Проверим, что f' есть линейный и непрерывный функционал.
1) Линейность. Пусть α и β произвольные комплексные числа и $\varphi_1,\,\varphi_2\in\mathcal{D}$, тогда

$$\begin{aligned}(f',\,\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2) &= -(f,\,\alpha\varphi_1'+\beta\varphi_2') = -\alpha(f,\,\varphi_1')+\beta(f,\,\varphi_2') \\ &= \alpha(f',\,\varphi_1)+\beta(f',\,\varphi_2).\end{aligned}$$

2) Непрерывность. Пусть $\varphi_n(x)\overset{\mathcal{D}}{\to}\varphi(x)$, $n\to\infty$, нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(f',\,\varphi_n) = (f',\,\varphi)$. Используя (21), будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}(f',\,\varphi_n) = -\lim_{n\to\infty}(f,\,\varphi_n') = -(f,\,\varphi') = (f,\,\varphi')\,,$$

так как из $\varphi_n(x)\overset{\mathcal{D}}{\to}\varphi(x)\Rightarrow\varphi_n'(x)\overset{\mathcal{D}}{\to}\varphi'(x)$ и f есть непрерывный функционал.

Производные высших порядков определяются для обобщенных функций по индукции

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})' \qquad k=1,2,3,\ldots$$

В этом случае легко проверить, что

$$(f^{(k)},\, \varphi) = (-1)^k (f,\, \varphi^{(k)})\,. \tag{22}$$

Пример 1. Найти производную функции Хэвисвйда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0\,, \end{cases}$$

Функция $\theta(x)$ локально интегрируема, поэтому порождает обобщенную функцию θ, действующую на основные функции $\varphi(x)$ по правилу

$$(\theta,\, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x)dx\,.$$

Тогда, для любого $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(\theta',\, \varphi) = -(\theta,\, \varphi') = -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0) = (\delta,\, \varphi)\,,$$

откуда

$$\theta'(x) = \delta(x)\,.$$

Аналогично $\theta'(x-a) = \delta(x-a)$.

Пусть $\psi(x)$ бесконечно дифференцируемая функция, а f обобщенная функция, тогда

$$\begin{aligned} ((\psi f)',\, \varphi) &= -(\psi f,\, \varphi') = -(f,\, \psi\varphi') = -(f,\, (\psi\varphi)' - \psi'\varphi) = \\ &= -(f,\, (\psi\varphi)') + (f,\, \psi'\varphi) = (f',\, \psi\varphi) + (\psi' f,\, \varphi) = \\ &= (\psi f',\, \varphi) + (\psi' f,\, \varphi) = (\psi f' + \psi' f,\, \varphi)\,, \end{aligned}$$

откуда

$$(\psi f)' = \psi f' + \psi' f\,.$$

Пример 2. Показать, что $x\delta' = -\delta$. По определению имеем

$$(x\delta',\, \varphi) = (\delta',\, x\varphi) = -(\delta,\, (x\varphi)') = -(\delta,\, x\varphi') - (\delta,\, \varphi) = -(\delta,\, \varphi)\,,$$

откуда

$$x\delta' = -\delta\,.$$

Пример 3. Найти производную от функции

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Обобщенная функция $\operatorname{sign} x$ определяется как

$$(\operatorname{sign} x,\, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} x\varphi(x)dx = -\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x)dx\,.$$

Для производной будем иметь

$$\begin{aligned}((\operatorname{sign} x)',\, \varphi) &= -(\operatorname{sign} x,\, \varphi') = \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi'(x)dx - \int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \\ &= \varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \varphi(x)\Big|_{0}^{\infty} = 2\varphi(0) = (2\delta,\, \varphi)\,.\end{aligned}$$

откуда

$$(\operatorname{sign} x)' = 2\delta(x)\,.$$

Пусть $f(x)$ имеет разрыв первого рода в точке x_0 (рис.9). Функция $f(x)$ порождает обобщенную функцию f:

$$(f,\, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx\,,$$

производная которой равна

$$f'(x) = \{f'(x)\} + h\delta(x - x_0)\,, \tag{23}$$

где

$$\{f'(x)\} = \begin{cases} f'(x), & x \neq x_0 \\ f'(x_0 - 0), & x = x_0 - 0 \\ f'(x_0 + 0), & x = x_0 + 0 \end{cases}\,.$$

Действительно, используя определение производной (21), будем иметь для любого $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}(f',\, \varphi) = -(f,\, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx - \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \\ -\Big[f(x)\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{x_0} - \Big[f(x)\varphi(x)\Big]_{x_0}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx + \int\limits_{x_0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \\ = [f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]\varphi(x_0) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{f'(x)\}\varphi(x)dx = \\ = \varphi(x_0) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{f'(x)\}\varphi(x)dx = (h\delta(x - x_0) + \{f'(x)\},\, \varphi)\,,\end{aligned}$$

откуда и следует равенство (23).

§9. Главное значение несобственных интегралов

Пусть в интервале $[a,\, b]$ задана функция $\varphi(x)$, которая имеет в точке $x = c \in [a.\, b]$ особую точку ($\varphi(c) = \infty$). Несобственный интеграл от $\varphi(x)$ по отрезку $[a,\, b]$ определя-

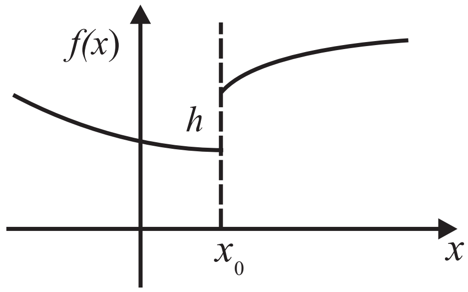

Рис. 9.

ется следующим образом

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}} \Big\{ \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon'}^b \Big\}, \tag{24}$$

причем пределы $\varepsilon \to +0$ и $\varepsilon' \to +0$ совершаются независимо друг от друга. Может оказаться, что предел (24) при независимых ε и ε' не существует. В то же время может существовать предел с $\varepsilon = \varepsilon'$. Вычисленный таким образом предел называется главным значением интеграла (24) и обозначается символом

$$\text{V.p.} \int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \Big\{ \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b \Big\}.$$

В этом случае говорят, что интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)dx$$

существует в смысле главного значения. Если интеграл (24) существует как несобственный, то он существует и в смысле главного значения, обратное, вообще говоря, неверно.
Пример 1. Пусть $a < 0$, $b > 0$, вычислим интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon'}^b \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_a^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon'}^b = \ln\frac{b}{|a|} + \ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

При независимых пределах $\varepsilon \to +0$, $\varepsilon' \to +0$, предел правой части не существует. При $\varepsilon = \varepsilon'$

$$\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x} = \ln\frac{b}{|a|}$$

независимо от ε. Поэтому главное значение интеграла есть

$$\text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \Big\{ \int_a^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^b \Big\} = \ln\frac{b}{|a|}.$$

При $a=-R$, $b=R$

$$\text{V.p.}\int\limits_{-R}^{R}\frac{dx}{x}=0\,. \tag{25}$$

Пример 2. Пусть $\varphi(x)\neq 0$ при $|x|\leqslant R$ и $\varphi(x)=0$ при $|x|>0$ и $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ конечны. Несобственный интеграл

$$\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

не существует, так как $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ имеет особую точку при $x=0$. Найдем главное значение интеграла.

$$\begin{aligned}\text{V.p.}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)}{x}dx &= \text{V.p.}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(0)}{x}dx+\text{V.p.}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx\\ &= \text{V.p.}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx=\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx\,,\end{aligned}$$

так как последний интеграл существует (значение подынтегральной функции в нуле равно $\varphi'(0)$) как несобственный и будет совпадать с главным значением. Итак

$$\text{V.p.}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx\,. \tag{26}$$

§10. Формулы Сохоцкого

Введем линейный функционал $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$, действующий по правилу

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\varphi)=\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx\,. \tag{27}$$

Функционал $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ является линейным и непрерывным на $\mathcal{D}'$. Пусть $\varphi_n(x)\stackrel{\mathcal{D}}{\to}\varphi(x)$. Достаточно доказать, что из сходимости последовательности $\bar{\varphi}_n=\varphi_n-\varphi\stackrel{\mathcal{D}}{\to}0\Rightarrow(\mathcal{P}\dfrac{1}{x}\,,\varphi_n)\to 0$, $n\to\infty$. Действительно, используя теорему о конечных разностях, $\varphi(x)-\varphi(0)=$

$\varphi'(\xi)x$, где $\xi \in (0\,, x)$ и $\varphi \in \mathcal{D}$, будем иметь

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{P}\frac{1}{x}\,, \bar{\varphi}_n\Big) &= \Big|\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_n(x)}{x}\Big| = \Big|\int\limits_{-R}^{R} \frac{\bar{\varphi}_n(x) - \bar{\varphi}_n(0)}{x}\Big| \\ &= \Big|\int\limits_{-R}^{R} \frac{\bar{\varphi}'_n(\xi)x}{x}\Big| \leqslant 2R\max_{|x\leqslant R|}|\bar{\varphi}'_n(x)| \to 0\,, \quad n \to \infty\,,\end{aligned}$$

так как из сходимости $\bar{\varphi}_n(x) \overset{\mathcal{D}}{\to} 0 \Rightarrow \bar{\varphi}'_n(x) \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$. Таким образом, $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ непрерывный функционал.

Определим обобщенную функцию $\dfrac{1}{x+i\varepsilon}$ как регулярный функционал

$$\Big(\frac{1}{x+i\varepsilon}\,, \varphi\Big) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx\,. \tag{28}$$

Установим теперь равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx = -i\pi\varphi(0) + \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx\,. \tag{29}$$

Действительно, если $\varphi(x) = 0$ при $|x| > R$, то

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx \\ &= \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}[\varphi(x)-\varphi(0)]dx \\ &i\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R} \frac{d(x/\varepsilon)}{1+(x/\varepsilon)^2} + \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx \\ &2i\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\text{arctg}\frac{R}{\varepsilon} + \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = i\pi\varphi(0) + \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx.\end{aligned} \tag{30}$$

Соотношение (30) можно переписать в виде

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\frac{1}{x+i\varepsilon}\,, \varphi\Big) = i\pi\varphi(0) + \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = (i\pi\delta + \mathcal{P}\frac{1}{x}\,, \varphi)\,.$$

Учитывая определение сходимости в $\mathcal{D}'$, последнее равенство означает, что

$$\frac{1}{x+i\varepsilon} \overset{\mathcal{D}'}{\to} i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}\,, \qquad \varepsilon \to +0\,.$$

Предел в правой части часто обозначают как $\dfrac{1}{x+i0}$, тогда

$$\frac{1}{x+i\varepsilon} \overset{\mathcal{D}'}{\to} \frac{1}{x+i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}\,, \qquad \varepsilon \to +0\,. \tag{31}$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{1}{x-i\varepsilon} \overset{\mathcal{D}'}{\to} \frac{1}{x-i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}\,, \qquad \varepsilon \to +0\,. \tag{32}$$

Формулы (31) и (32) называются формулами Сохоцкого.

Литература

1. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: М.: Физматлит, 2001.

2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

3. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

4. Владимиров В. С. Обобщенные функции и их применение . М.: Знание, 1990.

5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. М.: Физматгиз,1958.

6. Вишик М.И. Обобщенные функции. Соросовкий образовательный журнал, №12, с.112, 1997.